

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный университет леса

В.И. Мышенков, Е.В. Мышенков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
Часть вторая
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие
Для студентов специальности 073000

Издательство Московского государственного университета леса
Москва – 2005

УДК 519.6

М 94

Мышенков В.И., Мышенков Е.В. Численные методы. Ч. 2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие для студентов специальности 073000. – М.:МГУЛ, 2005. – 109 с.: ил.

Учебное пособие содержит изложение основных понятий и методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для задачи Коши и краевой задачи: постановки задач, понятия аппроксимации, устойчивости разностных методов, сходимости численных решений; одношаговые методы типа Рунге–Кутты, многошаговые методы типа Адамса, Милна и др., методы решения жестких систем ОДУ (неявные методы Рунге–Кутты и Гира), а также некоторые приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом ВПО 2000 г. на основе примерной программы дисциплины «Численные методы» для специальности 073000 «ПМ».

Одобрено и рекомендовано к изданию в качестве учебного пособия редакционно-издательским советом университета

Рецензенты: профессор Н.М. Тюмнев, МГТУ «МАМИ», каф. ПиВМ;
доцент Р.С. Федорчук, зав. каф. АиУ МГУЛ.

Кафедра математического моделирования,
Кафедра прикладной математики.

Авторы: Виталий Иванович Мышенков, профессор;
Евгений Витальевич Мышенков, профессор.

© Мышенков В.И., Мышенков Е.В., 2005

© Московский государственный университет леса, 2005

Предисловие

Настоящая книга является продолжением первой части книги “Численные методы”, изданной в 2002 году, и посвящена численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений – решению задачи Коши и краевой задачи. В книге излагаются наиболее универсальные конечно-разностные методы решения задач: явные и неявные методы Рунге–Кутты, Адамса, Гира и другие m -шаговые методы. Рассматриваются также некоторые приближенные методы решения краевой задачи.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ, как часто их называют в последнее время) находят все более широкое применение в математических моделях, разрабатываемых для моделирования процессов и явлений, происходящих в различных областях техники, науки и производства. Например: в механике — при моделировании процессов движения объектов; в биологии — при изучении процессов роста бактерий; в ядерной физике — при изучении процессов радиоактивного распада веществ; в химии — при исследовании протекания химических реакций и работы различных реакторов; в электротехнике, в задачах оптимизации экономических и других процессов и так далее. Одним словом, ОДУ является необходимым элементом и составной частью многих разрабатываемых математических моделей различных процессов и явлений. Поэтому изучение методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо для студентов специальности 073000 и может быть полезно студентам других специальностей и аспирантам, разрабатывающим отдельные математические модели и использующим их на практике.

Введение

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются уравнения, содержащие одну независимую переменную, искомую функцию $u = u(x)$ и одну или несколько ее производных. Например,

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0. \quad (0.1)$$

Здесь x — независимая переменная; $u^{(i)}$ — i -я производная неизвестной функции $u(x)$ $d^i u / dx^i$, $i = 1, 2, \dots, n$; F — некоторая функция от переменных x, u, u', u'', \dots . Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком n , входящей в уравнение производной. Например, уравнения первого и третьего порядка можно представить как

$$F(x, u, u') = 0; \quad F(x, u, u', u'', u''') = 0. \quad (0.2)$$

Если в уравнениях (0.1) и (0.2) старшую производную явно выразить через производные более низкого порядка и независимую переменную, то получаются уравнения, разрешенные относительно старшей производной. Например:

$$\begin{aligned} u' &= f(x, u); \\ u''' &= f(x, u, u', u''). \end{aligned} \quad (0.3)$$

Дифференциальные уравнения бывают линейными и нелинейными. Линейным уравнением называется уравнение, в котором неизвестная функция и ее производные входят в первой степени. Примеры линейных уравнений первого и второго порядка:

$$u' = 2xu + \cos x; \quad u'' = 3u' - 5xu + \operatorname{tg} x.$$

Остальные уравнения называются нелинейными.

Решением дифференциального уравнения называется произвольная функция $\varphi(x)$, которая удовлетворяет этому уравнению, то есть после подстановки в уравнение превращает его в тождество. Например, при подстановке $u = \varphi(x)$ в уравнения (0.3) получаем:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)); \quad \varphi'''(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)).$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка, как известно, содержит n произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_n и имеет вид

$$u = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (0.4)$$

Частное решение получается из общего (0.4) путем задания определенных значений произвольным постоянным. Например, для уравнения первого порядка $u' = f(x, u)$ из общего решения $u = \varphi(x, c_1)$ частное получается в результате задания произвольной константе c_1 некоторого значения $c_1 = c_0$:

$$u = \varphi(x, c_0). \quad (0.5)$$

Для выделения частного решения из общего для уравнений высшего порядка нужно задать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных содержится в общем решении, то есть каков порядок уравнения.

Для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dU(x)}{dx} = F(x, U),$$

где $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $F(x, U) = (f_1(x, U), f_2(x, U), \dots, f_n(x, U))^T$ — векторы, общее решение содержит n произвольных постоянных $U = \Phi(x, c_1, \dots, c_n)$, и для выделения его частных решений надо также задать n дополнительных условий, то есть столько, сколько уравнений содержит система.

Аналогичным образом определяется количество дополнительных условий n для системы уравнений произвольного порядка: $n = \sum_{j=1}^m k_j$, где j — номер уравнения системы; k_j — его порядок; m — количество уравнений системы.

В качестве дополнительных условий задаются значения искомой функции и ее производных при некоторых x . В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения различают два типа задач: *задачи Коши* и *краевые задачи*.

Если дополнительные условия задаются в одной точке x , то задача называется *задачей Коши*, а дополнительные условия называются *начальными условиями*. Точка $x = x_0$, в которой они задаются, — *начальной точкой*.

Если дополнительные условия задаются в *нескольких точках*, то есть при разных x , то такая задача называется *краевой*, а дополнительные условия — *краевыми* или *граничными условиями*. Обычно граничные условия задаются в точках $x = a$ и $x = b$, являющихся границами области решения дифференциального уравнения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Постановка задачи Коши

Постановка задачи Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в общем случае формулируется следующим образом.

Найти решение уравнения

$$\frac{dU(x)}{dx} = F(x, U) \quad \text{при} \quad x > x_0, \quad U(x_0) = U^0, \quad (1.1)$$

где x_0 — начальное значение x ; U^0 — начальное значение вектора U , $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$; $F(x, U) = (f_1(x, U), f_2(x, U), \dots, f_n(x, U))^T$, или, в развернутом виде:

$$\frac{du_i(x)}{dx} = f_i(x, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad x > x_0; \quad u_i(x_0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем предполагать, что решение системы (1.1) существует и единственно. Для этого, как известно из теоремы Коши, необходимо, чтобы функции $f_i(x, U)$ и их частные производные по второму аргументу $\frac{\partial f_i(x, U)}{\partial u_j}$

($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$), были непрерывны по всем аргументам в замкнутой области

$$D = \{ |x| \leq a; \quad |u_i - u_i^{(0)}| \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, n \}. \quad (1.2)$$

Здесь a, b — некоторые константы.

Из этих требований следует, что функции f_i ограничены в области D , то есть удовлетворяют условию $|f_i| \leq M$ ($M = \text{const}$), и, кроме того, удовлетворяют условию Липшица по аргументам u_i :

$$\begin{aligned} & |f_i(x, u'_1, u'_2, \dots, u'_n) - f_i(x, u''_1, u''_2, \dots, u''_n)| \leq \\ & \leq L \{ |u'_1 - u''_1| + |u'_2 - u''_2| + \dots + |u'_n - u''_n| \} \end{aligned}$$

для любых точек $(x, u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ и $(x, u''_1, u''_2, \dots, u''_n)$ области D . Здесь L — константа Липшица.

Например, для уравнений первого–третьего порядков задача Коши формулируется следующим образом.

Найти решения уравнений:

- а) $\frac{du}{dx} = f(x, u)$ для $x > x_0$ при $u(x_0) = u^0$;
- б) $\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, u, u')$ для $x > x_0$ при $u(x_0) = u^0, u'(x_0) = A$;
- в) $\frac{d^3u}{dx^3} = f(x, u, u', u'')$ для $x > x_0$ при $u(x_0) = u^0, u'(x_0) = A, u''(x_0) = B$.

Здесь A, B, u^0 — некоторые константы; u', u'' — производные функции u .

1.2. Постановка краевой задачи

Найти решение уравнения n -го порядка $u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$ на отрезке $a \leq x \leq b$ при краевых условиях:

$$\begin{aligned} u(a) &= A_0, & u(b) &= B_0; \\ u'(a) &= A_1, & u'(b) &= B_1; \\ & \dots & & \dots \\ u^{(k)}(a) &= A_k, & u^{(m)}(b) &= B_m; \\ & \dots & & \dots \\ u^{(i)}(a) &= A_i, & u^{(j)}(b) &= B_j. \end{aligned}$$

Здесь A_k, B_m — некоторые константы, $k = 0, 1, 2, \dots, i$; $m = 0, 1, 2, \dots, j$. Общее количество дополнительных условий на концах отрезка $[a, b]$ должно быть равно порядку дифференциального уравнения $i + j + 2 = n$.

В случае системы уравнений должно выполняться то же правило. Причем дополнительные условия не должны быть сосредоточены на одном каком-либо конце отрезка. Например, для уравнений второго и третьего порядков задача формулируется так. Решить краевую задачу для уравнения

$$u'' = f(x, u, u') \quad \text{на отрезке } a \leq x \leq b$$

$$\text{при краевых условиях } u(a) = A; \quad u(b) = B;$$

для уравнения третьего порядка решить задачу

$$u''' = f(x, u, u', u''), \quad a \leq x \leq b,$$

$$\text{при краевых условиях } u(a) = A; u'(a) = C, \quad u(b) = B;$$

$$\text{или при краевых условиях } u(a) = A; \quad u(b) = B; u'(b) = D.$$

Здесь A, B, C, D — некоторые константы, соответствующие значениям указанных функций в точках a, b .

Конкретные краевые условия выбираются из физической постановки задачи.

Для одного уравнения первого порядка краевую задачу поставить нельзя, так как в этом случае для выделения частного решения требуется только одно дополнительное условие, а в краевой задаче два конца, и, следовательно, минимальное количество дополнительных условий равно двум.

В случае системы двух уравнений первого порядка краевую задачу поставить уже можно, задав одно дополнительное условие для одного уравнения на одном конце отрезка, а для другого уравнения на другом. Например:

$$u' = f(x, u, z); \quad z' = \varphi(x, u, z);$$

$$a \leq x \leq b, \quad u(a) = u_a; \quad z(b) = z_b.$$

1.3. О методах решения дифференциальных уравнений

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений применяются аналитические, приближенные и численные методы.

Аналитические методы позволяют получать решения дифференциальных уравнений через элементарные или специальные функции в конечном виде и являются эффективным средством исследования уравнений, однако применимы лишь для ограниченного класса дифференциальных уравнений — линейных, с постоянными коэффициентами и др. Эти методы в основном реализованы в универсальных математических пакетах *MathCad*, *Maple* и других. Однако в практических задачах они оказываются часто неприменимыми.

Приближенные методы используют различные упрощения исходных уравнений: линеаризацию, разложения в ряд по некоторому малому параметру, асимптотические методы и др. Однако они также имеют ограниченную область применения, хотя и являются эффективным средством исследования решения.

Наиболее мощными и универсальными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений являются численные методы, позволяющие получать решения тогда, когда традиционные, классические, методы не помогают. Среди численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений одним из важнейших является метод конечных разностей.

Метод конечных разностей основывается:

1) на замене непрерывной области определения решения D дискретным множеством точек, называемым сеткой ω_h ;

2) на замене непрерывных функций дискретными (сеточными), определенными на введенной сетке изменения аргумента;

3) на замене производных, входящих в уравнение, конечными разностями. В результате вместо дифференциального уравнения получается конечно-разностное уравнение, определенное в узлах разностной сетки. Решение его сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Методы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i(x)}{dx} = f_i(x, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad x > x_0, \quad u_i(x_0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

разделяются на два класса:

1) *одноступенчатые методы*, использующие данные о решении только в одной точке. Однако приходится вычислять функции $f_i(x, u)$ в нескольких точках (x, u) . К этим методам относятся методы Рунге–Кутты и метод решения с помощью рядов Тейлора;

2) *многоступенчатые*, или *многошаговые*, *методы*, не требующие много повторных вычислений функций $f_i(x, u)$, использующие данные о решении в нескольких точках, что вынуждает применять одношаговые методы для запуска метода и при изменении шага интегрирования. Это методы прогноза-коррекции, Адамса и другие.

2.1. Простейшие методы типа Рунге–Кутта

2.1.1. Метод Эйлера

Метод Эйлера является самым простым методом решения задачи Коши типа Рунге–Кутта. Для простоты здесь и далее будем рассматривать одно уравнение первого порядка. Обобщение методов Рунге–Кутта для системы уравнений первого порядка и уравнения порядка n будет приведено в п. 6.8. .

Итак, требуется найти решение уравнения

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \tag{2.1}$$

при $x > x_0$, $u(x_0) = u_0$ до $x = x_N$.

Решение задачи строится следующим образом. Покрывается область определения решения D функции u (ось аргумента x) сеткой ω_h равноотстоящих точек, начиная от начальной точки: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$. Расстояния между точками, ради простоты, считаются равными $h = x_n - x_{n-1} = \text{const}$. Вводятся сеточные функции $u_n = u(x_n)$; $y_n = y(x_n)$; $f_n = f(x_n, y_n)$, определенные в узлах

сетки ω_n , то есть в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$. Функции $y_n, f(x_n, y_n)$ соответствуют численному решению разностной задачи, а $u(x_n)$ — решению дифференциальной задачи (2.1).

Предполагая, что известно значение y_n в точке x_n , и заменяя производную $u'(x_n)$ в уравнении $u' = f(x, u)$ выражением $u'(x_n) = (y_{n+1} - y_n)/h$, а значение $u(x_n)$ в функции $f(x, u)$ через y_n , получим разностное уравнение

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

Решение этого уравнения находится явным образом по рекуррентной формуле

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2)$$

Геометрическая интерпретация метода

Пусть в точке x_n получено численное решение задачи y_n . Полагая $y_n = u_n$, проводим через эту точку (x_n, y_n) гипотетическую интегральную кривую $u(x)$ и касательную к ней $f(x_n, u_n)$ (рис. 1). Она при принятых допущениях равна $f(x_n, y_n)$.

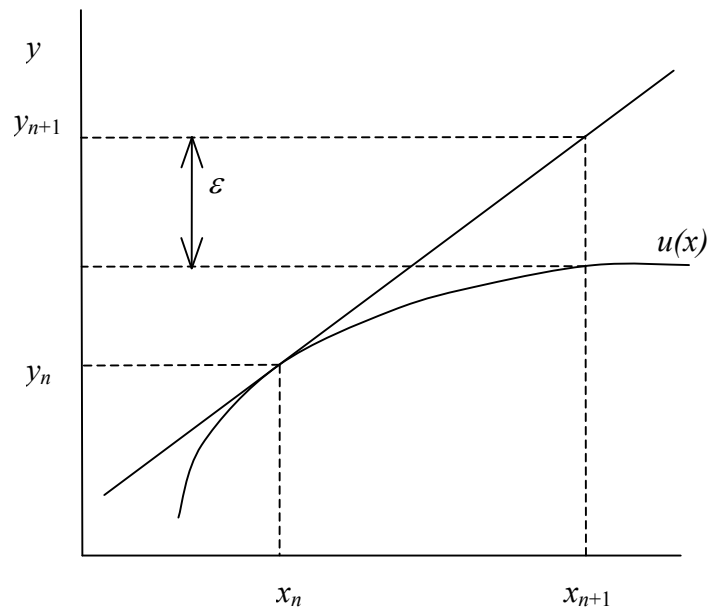


Рис. 1. Метод Эйлера

Точка пересечения этой касательной с перпендикуляром к оси x , проходящим через точку x_{n+1} , дает приближенное значение функции y_{n+1} в точке x_{n+1} . При этом погрешность решения равна $\varepsilon = y_{n+1} - u_{n+1}$. Следовательно, метод Эйлера есть линейная экстраполяция функции y_n в точку x_{n+1} по значениям ее и ее производной в точке x_n :

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Этот метод является методом Рунге–Кутты первого порядка $O(h)$, как будет показано далее. Он обладает большой погрешностью и часто оказывается неустойчивым, так как малая ошибка в начальных данных или из-за округлений при вычислениях увеличивается с ростом x . Поэтому этот метод редко применяется на практике. Чаще в расчетах применяются методы Рунге–Кутты более высокого порядка точности, например, второго или четвертого.

2.1.2. Исправленный метод Эйлера

Этот метод основывается на вычислении функции $y(x_{n+1})$ в последующей точке x_{n+1} по значению среднеарифметической величины тангенсов углов наклона касательной к интегральной кривой $y(x)$ в двух точках x_n и x_{n+1} . При этом предполагается известным решение задачи y_n в точке x_n .

Метод состоит из двух шагов:

1) по методу Эйлера (2.2) предварительно находится приближенное значение \bar{y}_{n+1} в точке $x = x_n + h$ по формуле

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

и в ней вычисляется функция $f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$;

2) тангенсы углов наклона касательных в точках (x_n, y_n) и (x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) складываются, и берется их среднее арифметическое значение $\Phi(x_n, y_n, h)$:

$$\Phi(x_n, y_n, h) = \frac{1}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})],$$

где $f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$.

После чего находится окончательное (уточненное) значение функции y_{n+1} в точке x_{n+1} по формуле

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h),$$

или в развернутом виде

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]. \quad (2.3)$$

Таким образом, при вычислении y_{n+1} функцию $f(x, y)$ приходится вычислять дважды в точках (x_n, y_n) и $(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$.

Исправленный метод Эйлера можно представить в стандартном для методов Рунге–Кутты виде, если обозначить $k_2 = f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$; $k_1 = f(x_n, y_n)$:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \sum_{i=1}^2 k_i / 2.$$

Геометрическая интерпретация метода

Как и в методе Эйлера, в точке (x_n, y_n) строится касательная L_1 к гипотетической интегральной кривой $u(x)$, и находится предварительное значение \bar{y}_{n+1} в точке пересечения этой касательной с перпендикуляром к оси x , проходящим через точку x_{n+1} (рис. 2). Далее, в точке $(x_{n+1}, y_n + h y'_n)$ снова строится

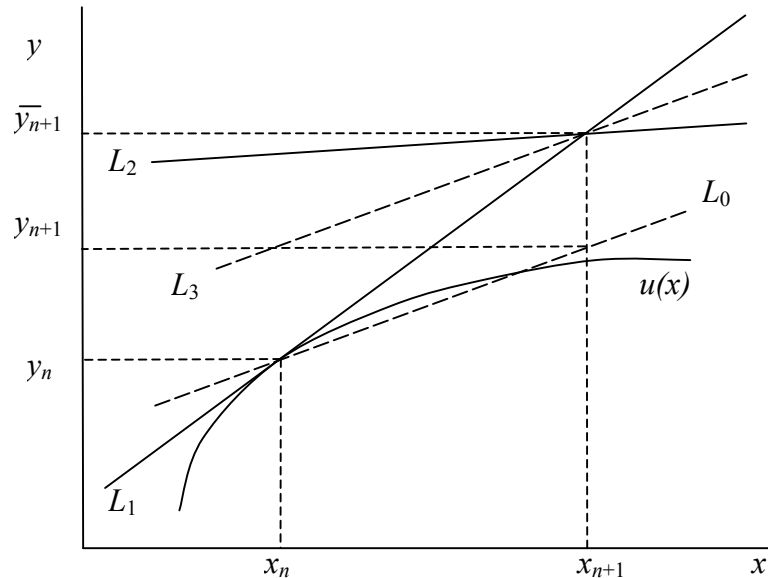


Рис. 2. Исправленный метод Эйлера

касательная L_2 к кривой $u(x)$. Затем определяется среднееарифметическое тангенсов углов наклона этих касательных (кривая L_3) и проводится через точку (x_n, y_n) линия L_0 , параллельная линии L_3 . Точка пересечения этой линии с ординатой, проходящей через точку x_{n+1} , дает уточненное значение функции y_{n+1} в точке x_{n+1} .

Оценка погрешности аппроксимации (невязки ψ_n) формулы (2.3) на основе разложения в ряд Тейлора функций u_{n+1} и $f(x_n + h, y_n + h f(x_n, u_n))$ показывает, что данный метод имеет второй порядок аппроксимации $O(h^2)$.

2.1.3. Модифицированный метод Эйлера

В этом методе вместо усредненного значения угла наклона касательных в точках (x_n, y_n) и (x_{n+1}, y_{n+1}) используется значение угла наклона касательной в точке $(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$, расположенной посередине между точками x_n и x_{n+1} . Как и ранее, предполагается известным значение решения y_n в точке x_n .

Метод состоит из двух шагов:

1) *первый шаг* — расчет значения функции $y_{n+1/2}$ в точке $(x_n + h/2)$ по методу Эйлера (2.2):

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n);$$

2) *второй шаг* — расчет функции y в точке с координатой x_{n+1} с использованием значения функции $f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$ в точке $(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_{n+1/2}).$$

Таким образом, расчетные формулы имеют следующий вид:

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n);$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right). \quad (2.4)$$

Обозначая через $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2)$, метод можно представить в обычном для методов Рунге–Кутты виде:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = k_2.$$

Этот метод также является методом Рунге–Кутты второго порядка. Здесь тоже приходится вычислять дважды функцию $f(x, y)$ для получения решения в следующей точке x_{n+1} .

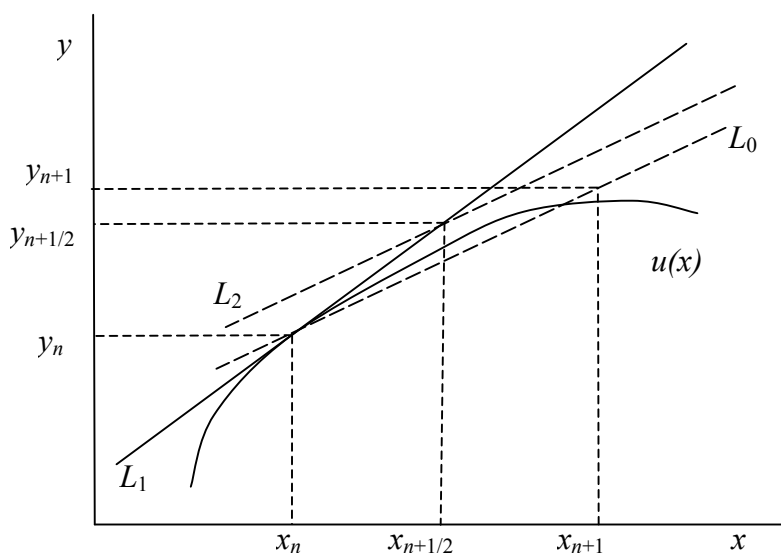


Рис. 3 Модифицированный метод Эйлера

Геометрическая интерпретация метода

В точке (x_n, y_n) строится касательная L_1 к гипотетической интегральной кривой $u(x)$ (рис. 3). Точка пересечения ее с перпендикуляром к оси x , проходящим через точку $x_n + h/2$, дает значение функции $y_{n+1/2}$. В этой точке

$(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$ снова проводится касательная L_2 к кривой $u(x)$. Для получения решения y_{n+1} проводится через точку (x_n, y_n) линия L_0 параллельно касательной L_2 . Точка пересечения L_0 с ординатой x_{n+1} дает искомое решение y_{n+1} .

Оценка невязки метода (2.4) при помощи ряда Тейлора, как показано ниже, дает второй порядок аппроксимации $O(h^2)$.

Для анализа погрешности численного решения модифицированным методом Эйлера получим точное решение задачи Коши для модельного уравнения

$$u' = \lambda u \text{ при } x > 0; \quad u(0) = a, \quad (2.5)$$

где a, λ — некоторые константы. Формула модифицированного метода Эйлера (2.4) для уравнения (2.5) имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + hy_n(\lambda + h\lambda^2/2) = y_n(1 + h\lambda + h^2\lambda^2/2),$$

так как в данном случае

$$f(x, y) = \lambda y, \text{ то } f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) = \lambda(y_n + h\lambda y_n/2).$$

Таким образом, точное решение уравнения (2.4) для модельного уравнения (2.5) в точке x_{n+1} имеет вид

$$y_{n+1} = a(1 + h\lambda + h^2\lambda^2/2)^{n+1}. \quad (2.6)$$

В то же время точное решение дифференциального уравнения (2.5) есть $u = ae^{\lambda x}$, которое при $x = h$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$:

$$u = a\left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \frac{h^3\lambda^3}{3!} + \dots\right). \quad (2.7)$$

Из сопоставления уравнений (2.6) и (2.7) видно, что численное решение задачи (2.5) представляет собой три первых члена разложения функции $e^{\lambda h}$ в ряд Тейлора, то есть точного решения дифференциального уравнения (2.5), и ошибка его $|u_n - y_n|$ возрастает с увеличением x при $\lambda > 0$.

В случае $\lambda < 0$ уравнение (2.5) будет иметь асимптотически устойчивое решение, затухающее с увеличением x ($u = ae^{-|\lambda|x}$), тогда как численное решение

$$y_{n+1} = a(1 - h|\lambda| + h^2\lambda^2/2)^{n+1} \text{ при } h > 2/|\lambda|$$

с увеличением n неограниченно возрастает. Это явление называют частичной неустойчивостью, и проявляется оно с увеличением h , начиная с некоторого $h > h_k$, во всех явных методах типа Рунге–Кутты. Явление это не следует пу-

тать с неустойчивостью разностной схемы (метода), которая проявляется при уменьшении шага интегрирования h .

Следует отметить, что явление частичной неустойчивости в явных методах Рунге–Кутты проявляется и при решении уравнений, не имеющих асимптотически устойчивых решений. В этих случаях частичная неустойчивость затухает за счет роста самого решения.

2.2. Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных методов

Пусть даны некоторый дифференциальный оператор, например,

$$Lu = a(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + b(x) \frac{du}{dx} + c(x)u,$$

и соответствующий ему разностный оператор, действующий на функцию $u^{(h)}$ на сетке ω_h :

$$L_h u^{(h)} = a(x_n) \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + b(x_n) \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + c(x_n)u_n.$$

Считается, что разностный оператор $L_h u^{(h)}$ аппроксимирует дифференциальный оператор Lu на некотором множестве гладких функций $u \in C^k$, если невязка ψ_n , равная разности этих операторов в каждой точке сетки ω_h , удовлетворяет условию

$$\psi_n = \|Lu - L_h u^{(h)}\| \leq O(h^p), \quad p < k \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Здесь p — порядок аппроксимации, определяемый посредством разложения функции u в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_n$.

Погрешность аппроксимации метода часто вводится также следующим образом. Определяется погрешность разностного решения задачи в виде

$$z_n = y_n - u(x_n),$$

где $u(x_n)$ — точное решение дифференциальной задачи (2.1), а y_n — численное решение разностной задачи в точке x_n . После чего в разностное уравнение, например, в уравнение метода Эйлера (2.2), подставляется функция $y_n = u(x_n) + z_n$. В результате получается уравнение для погрешности z_n :

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = f(x_n, u(x_n) + z_n) - \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h}. \quad (2.8)$$

Добавив и вычтя из уравнения (2.8) член $f(x_n, u_n)$, представим его в виде:

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = \psi_n + \varphi_n,$$

где
$$\psi_n = -\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} + f(x_n, u(x_n)); \quad (2.9)$$

$$\varphi_n = f(x_n, u(x_n) + z_n) - f(x_n, u(x_n)). \quad (2.10)$$

Функция ψ_n называется невязкой или погрешностью аппроксимации разностным уравнением (2.2) исходного дифференциального уравнения (2.1) на его решении $u(x)$. Невязка — это остаточный член в результате подстановки в разностное уравнение (2.2) точного решения $u(x)$ дифференциального уравнения (2.1). Если бы приближенное решение совпадало с точным $u(x_n)$, то невязка равнялась бы нулю.

Разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если $\psi_n \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Разностный метод имеет p -й порядок аппроксимации, если $\psi_n = O(h^p)$.

Порядок аппроксимации метода Эйлера (2.2), как и других методов, определяется с помощью разложения по формуле Тейлора функций, входящих в выражение невязки ψ_n (2.9) в окрестности точки (x_n, u_n) :

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + u'(x_n)h + O(h^2). \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в выражение для ψ_n (2.9) и используя (2.1), получаем

$$\psi_n = -u'(x_n) + f(x_n, u(x_n)) + O(h) = O(h),$$

то есть метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации. При этом предполагается ограниченность $u''(x)$.

Важным понятием при численном решении любой задачи является понятие устойчивости метода. Неустойчивый метод нельзя использовать при вычислениях, поскольку малые ошибки в задании начальных данных, правой части уравнения и погрешности при арифметических вычислениях могут приводить к большим изменениям в решении задачи.

Разностный метод решения задачи Коши

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \quad \text{для } x > x_0 \text{ при } u(x_0) = u^0, \text{ где}$$

$$u = u(u_1, u_2, \dots, u_k)^T, \quad f(x, u) = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T,$$

называют устойчивым на отрезке $(x_0, X]$, если малые возмущения начальных данных δu^0 , правой части уравнения δf_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и погрешности округления при вычислениях Δ_i при всех шагах сетки $h < h_0$ приводят к малым изменениям численного решения задачи

$$\max |y_n - y_n^*| \leq C(\max |\delta u^0| + \sum_{i=0}^{n-1} \|\delta f_i\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta_i\|).$$

Здесь C — константа, не зависящая от шага интегрирования h ; h_0 — некоторый шаг интегрирования; n — общее число шагов интегрирования; y_n — невозмущенное численное решение в точке x_n (без погрешностей в начальных данных, в правой части уравнения и без округлений); y_n^* — возмущенное численное решение (y — вектор).

Приведенное условие устойчивости в случае линейных операторов L_h равносильно следующему. Разностный метод с линейным оператором L_h называют устойчивым, если при любой функции $f^{(h)} \in F_h$ уравнение $L_h y^{(h)} = f^{(h)}$ имеет единственное решение $y^{(h)} \in U_h$ для всех x и $h \rightarrow 0$, удовлетворяющее условию

$$\|y^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|f^{(h)}\|_{F_h}.$$

Здесь C — некоторая константа, не зависящая от h ; $f^{(h)}$ — правая часть дифференциального уравнения (сеточная функция); F_h , U_h — допустимые множества значений функций $f^{(h)}$ и $y^{(h)}$ соответственно.

Главным вопросом при численном решении задачи является вопрос сходимости решения. Считается, что численный метод сходится, если численное решение задачи $y_n^{(h)}$ для выбранной точки x сходится к решению дифференциального уравнения $u(x_n)$ в этой точке с уменьшением шага сетки h . Это означает, что для выбранной точки x последовательность решений разностного уравнения, например (2.2), на различных сетках ω_h при $h \rightarrow 0$ и $x = nh = \text{const}$ сходится к решению дифференциального уравнения (2.1) в этой точке:

$$\|y_n^{(h)} - u(x_n)\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, x_n = x_0 + nh = \text{const}.$$

Здесь $y_n^{(h)}$ — решение разностного уравнения, например, (2.2) на сетке ω_h ; $u(x_n)$ — решение дифференциального уравнения (2.1).

Метод сходится на отрезке $(x_0, X]$, если он сходится в каждой точке сетки.

Метод имеет p -й порядок точности, если существует такое число $p > 0$, что $\|y_n^{(h)} - u(x_n)\| \leq O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Порядок точности разностного метода, как будет показано далее, совпадает с порядком его аппроксимации.

Рассмотрим аппроксимации некоторых разностных методов второго порядка.

2.2.1. Симметричная схема

В этом случае дифференциальное уравнение (2.1) заменяется (аппроксимируется) следующим разностным уравнением:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) = 0, \quad n = 0, 1, \dots; \quad y_0 = y(x_0). \quad (2.12)$$

В этом методе новое значение y_{n+1} определяется неявно каким-либо итерационным методом из уравнения

$$y_{n+1} - \frac{1}{2}hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$

Эта схема обладает более высоким порядком точности, чем схема Эйлера. Невязка ее имеет вид

$$\psi_n = -\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} + \frac{1}{2}(f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})).$$

Используя формулу Тейлора для разложения функций $u(x_{n+1})$ и $f(x_{n+1}, u_{n+1})$ в окрестности точки (x_n, u_n) , ее можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_n &= -u'(x_n) - \frac{h}{2}u''(x_n) + O(h^2) + \frac{1}{2}(u'(x_n) + u'(x_{n+1})) = \\ &= -u'(x_n) - \frac{h}{2}u''(x_n) + \frac{1}{2}(u'(x_n) + u'(x_n) + hu''(x_n)) + O(h^2) = O(h^2). \end{aligned}$$

Следовательно, схема (2.12) имеет второй порядок аппроксимации и второй порядок точности.

2.2.2. Модифицированный метод Эйлера

В модифицированном методе Эйлера сначала вычисляют значение $y_{n+1/2}$ в промежуточной точке $x = x_{n+1/2}$ по методу Эйлера

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{0,5h} = f(x_n, y_n),$$

а потом, используя разностное уравнение (2.4), находят значение функции y_{n+1} в точке x_n

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n + 0,5h, y_{n+1/2}). \quad (2.13)$$

Для определения невязки схемы подставим $y_{n+1/2} = y_n + 0,5hf_n$ в уравнение (2.13), в результате получаем

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n + 0,5h, y_n + 0,5hf(x_n, y_n)).$$

Невязка этого уравнения равна

$$\psi_n = -\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} + f(x_n + 0,5h, u(x_n) + 0,5hf(x_n, u(x_n))). \quad (2.14)$$

Разлагая функции u_{n+1} и $f_{n+1/2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_n, u_n) , имеем

$$\begin{aligned} u(x_{n+1}) &= u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h}{2}u''(x_n) + O(h^3); \\ f(x_n + 0,5h, u(x_n) + 0,5hf(x_n, u(x_n))) &= f(x_n, u(x_n)) + \\ &+ 0,5h \left(\frac{\partial f(x_n, u(x_n))}{\partial x} + f(x_n, u(x_n)) \frac{\partial f(x_n, u(x_n))}{\partial u(x)} \right) + O(h^2) = \\ &= f(x_n, u(x_n)) + 0,5hu''(x_n) + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Последнее выражение следует из исходного уравнения (2.1), так как

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Подставляя разложения (2.15) в выражение невязки (2.14), получаем, что рассматриваемый метод имеет второй порядок погрешности аппроксимации $\psi_n = O(h^2)$ и, в отличие от предыдущего с симметричной схемой, является явным.

2.3. Решение с помощью рядов Тейлора

Этот метод теоретически пригоден для решения любых дифференциальных уравнений, но практически не представляет интереса из-за трудностей его применения. Однако он широко используется в качестве эталона для сравнения различных вычислительных методов.

Предположим, что известно решение уравнения $u' = f(x, u)$ в некоторой точке x_n $u(x_n)$ разностной сетки ω_h ($x_n = x_0 + nh$, $h = x_{n+1} - x_n$ — шаг сетки). Найдем значение функции $u(x_{n+1})$ в следующей точке $x_{n+1} = x_n + h$. Для этого представим разложение функции $u(x_n + h)$ в окрестности точки x_n в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} u(x_n + h) &= u(x_n) + u'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{u''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 + \\ &+ \frac{u'''(x_n)}{3!}(x_{n+1} - x_n)^3 + \dots, \end{aligned}$$

или в компактной форме

$$u_{n+1} = u_n + u'_n h + u''_n \frac{h^2}{2} + u'''_n \frac{h^3}{3!} + \dots,$$

где $u_{n+1} = u(x_{n+1})$, $x_{n+1} = x_n + h$, $h = x_{n+1} - x_n$.

Точность полученного решения определяется количеством членов ряда Тейлора, используемых в решении. Для их определения необходимо вычислить значения производных $u_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$), используемых в ряде Тейлора.

Первая производная u'_n определяется непосредственно из дифференциального уравнения

$$u'_n = f(x_n, u_n).$$

Для вычисления второй производной продифференцируем исходное уравнение $u'_n = f(x_n, u_n)$ по x :

$$u'' = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} + f(x, u) \frac{\partial f(x, u)}{\partial u}.$$

В компактной форме это выражение можно записать в виде

$$u''_n = (f_x + ff_u)_n,$$

где $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$ — частные производные, $f_n = f(x_n, u_n)$.

При этом ряд Тейлора для вычисления u_{n+1} принимает вид

$$u_{n+1} = u_n + hf_n + \frac{h^2}{2} (f_x + ff_u)_n + O(h^3). \quad (2.16)$$

Здесь $O(h^3)$ — остаточные члены ряда Тейлора с h не ниже третьей степени.

Для получения лучшего приближения к решению необходимо вычислить третью производную функции u''' в точке $x = x_n$:

$$u'''_n = f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2 f_{uu} + f_x f_u + ff_u^2.$$

Выражения для последующих производных становятся еще более сложными. Трудности вычисления этих производных и являются основным препятствием для практического применения этого метода.

2.4. Ряд Тейлора

Поскольку при определении порядка невязки (аппроксимации) разностных методов приходится использовать разложения функций в ряд Тейлора, приведем в качестве справки формулы ряда Тейлора для непрерывных функций от одной, двух и m переменных, имеющих все необходимые производные в точке разложения. Далее h, k, l — малые приращения переменных.

Для функции одной переменной

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n.$$

Остаточный член

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Для функции двух переменных

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = & f(x, y) + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 \right) + \frac{1}{6!} (\dots) + \dots + \frac{1}{n!} (\dots) + R_n, \end{aligned}$$

а в символической форме

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = & f(x, y) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) + \\ & + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x, y) + R_n, \end{aligned}$$

где остаточный член равен

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k), \quad (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1).$$

Для функции от m переменных ряд Тейлора в символической форме имеет вид

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots, t+l) = \\ = f(x, y, \dots) + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \dots + \frac{\partial}{\partial t} l \right)^p f(x, y, \dots, t) + R_n, \end{aligned}$$

где

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \dots + \frac{\partial}{\partial t} l \right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, \dots, t+\theta_m l), \quad (0 < \theta_i < 1).$$

3. МЕТОДЫ РУНГЕ–КУТТА

3.1. Общая формулировка методов

Формулировку методов Рунге–Кутта, ради простоты, рассмотрим на примере решения одного уравнения первого порядка, так как обобщение методов на систему уравнений не представляет трудностей и будет показано позже.

Итак, рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \quad \text{для } x > x_0, \quad u(x_0) = u_0. \quad (3.1)$$

Явный m -этапный метод Рунге–Кутта заключается в следующем. Пусть численное решение задачи Коши известно в точке x_n — $y_n = y(x_n)$. Задаются некоторые числовые коэффициенты a_i , b_{ij} , $i = 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, (m-1)$; σ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ и последовательно вычисляются следующие функции:

$$k_1 = f(x_n, y_n);$$

$$k_2 = f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hk_1);$$

$$k_3 = f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hk_1 + b_{32}hk_2);$$

.....

$$k_m = f(x_n + a_mh, y_n + b_{m1}hk_1 + \dots + b_{m,m-1}hk_{m-1});$$

затем из формулы

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \sum_{i=1}^m \sigma_i k_i \quad (3.2)$$

находится решение задачи в следующей точке x_{n+1} — $y(x_{n+1})$. Коэффициенты a_i , b_{ij} , σ_i выбираются из соображений точности аппроксимации разностным уравнением (3.2) дифференциального (3.1). Чтобы уравнение (3.2) аппроксимировало (3.1), необходимо потребовать, чтобы $\sum_{i=1}^m \sigma_i = 1$. Методы Рунге–

Кутта при $m > 5$ используются нечасто. Наиболее широкое применение нашли методы Рунге–Кутта при $m = 4$.

3.2. Семейство двухэтапных методов

При $m = 1$ получается одноэтапный метод — метод Эйлера (2.2). При $m = 2$ — семейство двухэтапных методов следующего вида:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n); \\ k_2 &= f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h k_1); \\ y_{n+1} &= y_n + h(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим погрешность аппроксимации двухэтапных методов в зависимости от выбора параметров: a , b , σ . Исключая из последнего уравнения функции k_1 и k_2 , сведем его к виду

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \sigma_1 f(x_n, y_n) + \sigma_2 f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h f(x_n, y_n)). \quad (3.3)$$

Невязка этого уравнения имеет вид

$$\psi_n = -\frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \sigma_1 f(x_n, u_n) + \sigma_2 f(x_n + a_2 h, u_n + b_{21} h f(x_n, u_n)). \quad (3.4)$$

Предполагая достаточную гладкость решения $u(x)$ и функции $f(x, u)$, разложим все члены, входящие в выражение невязки (3.4), по формуле Тейлора в точке x_n с точностью до $O(h^3)$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} &= u'(x_n) + \frac{h}{2} u''(x_n) + \frac{h^2}{3!} u'''(x_n) + O(h^3); \\ f(x_n + a_2 h, u_n + b_{21} h f_n) &= f_n + a_2 h \frac{\partial f_n}{\partial x} + b_{21} h f_n \frac{\partial f_n}{\partial u} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(a_2 h \frac{\partial}{\partial x} + b_{21} h f_n \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 f_n + O(h^3), \end{aligned}$$

где $f_n = f(x_n, u_n)$; $\frac{\partial f_n}{\partial u} = \frac{\partial f(x_n, u_n)}{\partial u} = f_u$.

Последовательно дифференцируя уравнение (3.1), имеем:

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} u' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} f = f_x + f f_u; \\ u''' &= f_{xx} + 2 f f_{xu} + f_x f_u + f f_u^2 + f^2 f_{uu}. \end{aligned}$$

Здесь $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $f_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$; $f_{xu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}$.

Подставляя полученные разложения функций и представления производных u'' и u''' в выражение невязки (3.4) и собирая члены одинакового порядка, получаем

$$\begin{aligned} \psi_n = & -u'_n + (\sigma_1 + \sigma_2)f_n + h \left[-\frac{u''}{2} + \sigma_2(a_2 f_x + b_{21} ff_u) \right]_n + \\ & + h^2 \left[-\frac{u'''}{6} + \frac{\sigma_2}{2}(a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} ff_{xu} + b_{21}^2 f^2 f_{uu}) \right]_n + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из выражения (3.5) видно, что для того чтобы схема (3.3) имела первый порядок аппроксимации, необходимо выполнение условия

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1.$$

Тогда первые два члена невязки (3.5), с учетом уравнения (3.1), пропадают.

Чтобы схема имела второй порядок аппроксимации, необходимо потребовать равенства нулю члена с h в первой степени:

$$-\frac{u''}{2} + \sigma_2(a_2 f_x + b_{21} ff_u) = 0.$$

Заменяя $u'' = f_x + ff_u$, это уравнение перепишем в виде

$$f_x(\sigma_2 a_2 - 0,5) + ff_u(\sigma_2 b_{21} - 0,5) = 0,$$

что выполняется при условиях

$$\sigma_2 a_2 = 0,5 \text{ и } \sigma_2 b_{21} = 0,5.$$

В результате получается однопараметрическое семейство двухэтапных методов Рунге–Кутты второго порядка аппроксимации при условии

$$\sigma_2 a_2 = \sigma_2 b_{21} = 0,5 \rightarrow a_2 = b_{21} = a.$$

Это семейство можно записать в виде

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = (1 - \sigma)f(x_n, y_n) + \sigma f(x_n + ah, y_n + ahf(x_n, y_n)),$$

где $\sigma a = 0,5$.

При $\sigma = 1$, $a = 0,5$ получаем модифицированный метод Эйлера (2.4):

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2),$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = k_2.$$

При $\sigma = 0,5$, $a = 1$ получаем другой метод второго порядка, который называют исправленным методом Эйлера (2.3):

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1),$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \sum_{i=1}^2 k_i / 2.$$

Чтобы получить метод третьего порядка аппроксимации, необходимо приравнять к нулю сумму членов второго порядка малости в выражении для невязки (3.5)

$$h^2 \left[-\frac{u'''}{6} + \frac{\sigma_2}{2} (a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} ff_{xu} + b_{21}^2 f^2 f_{uu}) \right] = 0.$$

Заменой $u''' = f_{xx} + 2ff_{xu} + f_x f_u + ff_u^2 + f^2 f_{uu}$ это уравнение сводится к виду

$$-\frac{f_{xx}}{6} - \frac{ff_{xu}}{3} - \frac{f_x f_u}{6} - \frac{ff_u^2}{6} - \frac{f^2 f_{uu}}{6} + \frac{\sigma_2 a_2^2}{2} f_{xx} + \sigma_2 a_2 b_{21} ff_{xu} + \frac{\sigma_2 b_{21}^2}{2} f^2 f_{uu} = 0.$$

Отсюда получаются уравнения:

$$f_{xx} \left(\frac{\sigma_2 a_2^2}{2} - \frac{1}{6} \right) = 0; \quad ff_{xu} \left(\sigma_2 a_2 b_{21} - \frac{1}{3} \right) = 0; \quad f^2 f_{uu} \left(\frac{\sigma_2 b_{21}^2}{2} - \frac{1}{6} \right) = 0,$$

которые при $\sigma_2 a_2 = 0,5$ удовлетворяются при $a_2 = b_{21} = a = 2/3$, $\sigma_2 = 3/4$, а два оставшихся члена $f_x f_u$ и ff_u^2 вообще не могут быть компенсированы. Следовательно, двухэтапные методы Рунге–Кутты не могут иметь третьего порядка аппроксимации для функций общего вида $f(x, u)$, зависящих от функции $u(x)$, то есть решения уравнения.

Рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального уравнения (3.1), то есть функция f , зависит только от x — $f(x)$. Есть ли в этом случае двухэтапные методы третьего порядка аппроксимации?

Невязка двухэтапного метода при этом принимает вид

$$\psi_n = -u'_n - \frac{h}{2} u''_n - \frac{h^2}{3!} u'''_n - \frac{h^3}{4!} u^{(4)}_n + \sigma_1 f_n + \sigma_2 \left[f_n + haf_x + \frac{h^2}{2!} a^2 f_{xx} + \frac{h^3}{3!} a^3 f_{xxx} \right]_n + O(h^4).$$

Собирая члены с одинаковыми степенями h и приравнявая их к нулю, получаем следующие уравнения:

- 1) $(\sigma_1 + \sigma_2 - 1) = 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = 1$ — это обеспечивает первый порядок аппроксимации;

2) $hf_x(\sigma_2 a - 0.5) = 0 \Rightarrow a\sigma_2 = 0.5$ — это дает второй порядок аппроксимации;

3) $h^2 f_{xx}(\sigma_2 a^2/2 - 1/6) = 0 \Rightarrow \sigma_2 a^2 = 1/3 \rightarrow a = 2/3, \sigma_2 = 3/4, \sigma_1 = 1/4$ — это дает третий порядок аппроксимации схемы;

4) $h^3 f_{xxx}(a^3/6 - 1/4) = 0 \Rightarrow \sigma_2 a^3 = 1/4$ — при выполнении предыдущих условий для коэффициентов σ_2 и a это уравнение не удовлетворяется. Следовательно, двухэтапного метода (схемы) порядка $O(h^4)$ не существует.

Таким образом, наивысший порядок аппроксимации двухэтапного метода Рунге–Кутты для случая с функциями $f(x)$, зависящими только от x , есть $O(h^3)$. Соответствующая разностная схема имеет вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{4} f(x_n) + \frac{3}{4} f(x_n + 2h/3).$$

3.3. Методы Рунге–Кутты более высокого порядка

Методы Рунге–Кутты более высокого порядка получаются точно так же, как и двухэтапные методы. Выписываются для них выражения невязок, раскладываются в ряд Тейлора в окрестности точки (x_n, u_n) функции, входящие в невязки, затем группируются члены одного порядка малости по h и приравниваются к нулю. В результате получаются уравнения для определения коэффициентов метода a_i, b_{ij}, σ_i . Порядок остаточного члена невязки $O(h^p)$ определяет порядок аппроксимации разностного метода.

Для трехэтапных методов Рунге–Кутты ($m = 3$) в общем случае существует двухпараметрическое семейство методов третьего порядка аппроксимации. В качестве примера приведем два метода третьего порядка.

Первый метод: $k_1 = f(x_n, y_n); k_2 = f(x_n + h/2, y_n + k_1 h/2);$

$$k_3 = f(x_n + h, y_n - h k_1 + 2h k_2);$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3). \quad (3.6)$$

Второй метод: $k_1 = f(x_n, y_n); k_2 = f(x_n + h/3, y_n + k_1 h/3);$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}h k_2\right);$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{4} (k_1 + 3k_3). \quad (3.7)$$

В случае четырехэтапных методов ($m = 4$) получается также многопараметрическое семейство, исследовать которое значительно сложнее. Из множества методов четвертого порядка приведем три.

Первый метод:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n); & k_2 &= f(x_n + h/4, y_n + k_1 h/4); \\
 k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2\right); & k_4 &= f(x_n + h, y_n + h k_1 - 2h k_2 + 2h k_3); \\
 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} &= \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Второй метод:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n); & k_2 &= f(x_n + h/3, y_n + k_1 h/3); \\
 k_3 &= f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n - \frac{h k_1}{3} + h k_2\right); & k_4 &= f(x_n + h, y_n + h k_1 - h k_2 + h k_3); \\
 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} &= \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Широкое распространение получил *третий метод* четвертого порядка, обычно называемый просто методом Рунге–Кутты:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n); & k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + k_1 h/2); \\
 k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2\right); & k_4 &= f(x_n + h, y_n + h k_3); \\
 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Получим решение задачи Коши для модельного уравнения

$$u' = \lambda u \quad \text{при } x > 0, \quad u(0) = a \tag{3.11}$$

методом Рунге–Кутты четвертого порядка (3.10). В этом случае формулы для коэффициентов k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \lambda y_n; \\
 k_2 &= \lambda y_n + \frac{h}{2} \lambda^2 y_n; \\
 k_3 &= \lambda y_n + \frac{h}{2} \lambda \left(y_n + \frac{h}{2} \lambda y_n\right);
 \end{aligned}$$

$$k_4 = \lambda y_n + h\lambda \left[y_n + \frac{h}{2} \lambda (y_n + \frac{h}{2} \lambda y_n) \right].$$

Подставляя в формулу (3.10) значения k_i , получаем решение y_{n+1} :

$$y_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2 \lambda^2}{2!} + \frac{h^3 \lambda^3}{3!} + \frac{h^4 \lambda^4}{4!} \right) y_n = a \left(1 + h\lambda + \frac{h^2 \lambda^2}{2!} + \frac{h^3 \lambda^3}{3!} + \frac{h^4 \lambda^4}{4!} \right)^{n+1}.$$

Сравнивая с точным решением $u = ae^{\lambda x}$ уравнения (3.11), мы видим, что выражение в скобках представляет собой пять первых членов разложения функции $e^{\lambda h}$ в ряд Тейлора.

Приближенный способ оценки погрешности решения, получаемого методом Рунге–Кутты (3.10), и выбора шага интегрирования предложил Коллатц [17]. Он полагает, что если в процессе расчетов величина

$$R = \frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|}$$

становится больше нескольких сотых, то шаг интегрирования следует уменьшить. Однако величина погрешности решения остается неизвестной. Более точный способ оценки погрешности и выбора шага предложил Рунге.

3.4. Способы оценки погрешности приближенного решения

Рассмотрим оценку погрешности приближенного решения способом Рунге. Способ основывается на предположении, что для погрешности приближенного решения в точке x_n справедливо асимптотическое разложение

$$R_n = z(x_n)h^p + O(h^{p+1}) \cong z(x_n)h^p. \quad (3.12)$$

Здесь $z(x_n)h^p$ — главный член невязки; p — порядок аппроксимации используемой разностной схемы.

Затем решение задачи в некоторой точке x_n , где необходимо оценить погрешность получаемого решения, вычисляется дважды одним методом, но с разными шагами h , и полученные решения используются для оценки погрешности. Обычно выбирают шаги h и $h/2$.

Пусть вычислено в точке x_n решение \bar{y}_n с шагом h . Тогда погрешность этого решения на основании (3.12) равна

$$R_n^h = u(x_n) - \bar{y}_n \cong z(x_n)h^p, \quad (3.13)$$

где $u(x_n)$ — точное решение дифференциальной задачи (3.1).

Для решения с шагом $h/2$ получаем аналогичную оценку погрешности в этой же точке x_n :

$$R_n^{h/2} = u(x_n) - \tilde{y}_n \cong z(x_n) \left(\frac{h}{2} \right)^p. \quad (3.14)$$

Исключая $u(x_n)$ из уравнений (3.13) и (3.14), получаем

$$\tilde{y}_n - \bar{y}_n \cong z(x_n) h^p \left(1 - \frac{1}{2^p} \right).$$

Отсюда следует

$$z(x_n) \cong \frac{\tilde{y}_n - \bar{y}_n}{h^p \left(1 - \frac{1}{2^p} \right)}. \quad (3.15)$$

Окончательно получаем оценки погрешностей:

$$R_n^h = u(x_n) - \bar{y}_n \cong z(x_n) h^p = (\tilde{y}_n - \bar{y}_n) / \left(1 - \frac{1}{2^p} \right);$$

$$R_n^{h/2} = u(x_n) - \tilde{y}_n \cong (\tilde{y}_n - \bar{y}_n) / (2^p - 1).$$

Здесь $R_n^h, R_n^{h/2}$ — погрешности решения в точке x_n с шагами интегрирования h и $h/2$ соответственно.

Таким образом, полученное приближенное решение можно уточнить по формуле

$$y(x_n) \approx y_n \approx \bar{y}_n + R_n^h,$$

или

$$y(x_n) \approx y_n \approx \tilde{y}_n + R_n^{h/2}.$$

Погрешность решения при этом уменьшается на порядок: $u(x_n) - y_n = O(h^{p+1})$.

При решении задачи основными остаются вопросы получения решения с заданной допустимой погрешностью ε и экономичности вычислительной работы, то есть должно быть $R_n < \varepsilon$, время решения задачи — минимально, а шаг h должен быть максимально возможным. Величину h_ε , соответствующую $R_n \leq \varepsilon$, можно получить из условия

$$|z_n| h_\varepsilon^p = \varepsilon \Rightarrow h_\varepsilon = \sqrt[p]{\frac{\varepsilon}{|z_n|}}.$$

Используя уравнение (3.15), получаем

$$h_\varepsilon \cong \sqrt[p]{\frac{h^p \varepsilon (2^p - 1)}{|\tilde{y}_n - \bar{y}_n| 2^p}} = \frac{h}{2} \sqrt[p]{\frac{(2^p - 1) \varepsilon}{|\tilde{y}_n - \bar{y}_n|}}. \quad (3.16)$$

При $p \geq 4$, пренебрегая в формуле (3.16) единицей по сравнению с 2^p , имеем

$$h_\varepsilon \cong h \sqrt[p]{\frac{\varepsilon}{|\tilde{y}_n - \bar{y}_n|}}.$$

Отсюда следует, что если $|R_n| > \varepsilon$, то h уменьшается, и наоборот.

3.4.1. Оценка локальной погрешности решения

Для оценки локальной погрешности решения при переходе от точки x_n к точке x_{n+1} используем также способ Рунге. В этом случае по одной и той же формуле вычисляются два приближения к решению в одной точке, но с разными шагами, которые используются для получения оценки.

Для локальной (в соседней точке) ошибки решения с шагом h справедлива оценка

$$u(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} = \psi(x_n, y_n) h^{p+1} + O(h^{p+2}). \quad (3.17)$$

При этом считается $\rho_n = 0$ — начальная погрешность.

Для локальной ошибки решения с шагом $h/2$ при $x_{n+1/2}$ это выражение принимает вид

$$u(x_n + h/2) - \tilde{y}_{n+1/2} \cong \psi(x_n, y_n) \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}.$$

При выполнении второго полушага из точки $x_n + h/2$ в точку x_{n+1} получаем приближенное значение \tilde{y}_{n+1} в точке $x_{n+1} = x_n + h$:

$$u(x_n + h) - \tilde{y}_{n+1} \cong \psi(x_n + h/2, \tilde{y}_{n+1/2}) \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}.$$

Так как при расчетах используются малые величины h , то, в силу предположения линейности приращения функции, погрешность решения в точке $x_{n+1} = x_n + h$ (после второго полушага) приближенно можно оценить посредством выражения

$$u(x_n + h) - \tilde{y}_{n+1} \cong 2\psi(x_n, y_n) \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}. \quad (3.18)$$

На основании выражений (3.17) и (3.18) получаем:

$$\psi(x_n, y_n) h^{p+1} \cong \frac{(\tilde{y}_{n+1} - \bar{y}_{n+1})}{(1 - 1/2^p)}$$

и

$$2\psi(x_n, y_n) \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} \cong \frac{(\tilde{y}_{n+1} - \bar{y}_{n+1})}{(2^p - 1)}.$$

Если в качестве приближения к решению в точке x_{n+1} принять \bar{y}_{n+1} , то погрешность метода равна

$$\bar{\rho}_{n+1} = u(x_n + h) - \bar{y}_{n+1} \cong \frac{(\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_{n+1})}{(1 - 1/2^p)}. \quad (3.19)$$

Если же приближением считать \bar{y}_{n+1} , полученное с шагом $h/2$, то погрешность метода равна

$$\bar{\rho}_{n+1} = u(x_n + h) - \bar{y}_{n+1} \cong \frac{(\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_{n+1})}{(2^p - 1)}. \quad (3.20)$$

3.4.2. Интегрирование с переменным шагом

Применение переменного шага интегрирования позволяет учитывать характер поведения решения и уменьшать общее число шагов, сохранив при этом требуемую точность приближенного решения. Таким способом могут быть снижены объем работы и машинное время и замедлен рост вычислительной погрешности.

Для этих целей чаще всего применяется алгоритм выбора шага с помощью удвоения и деления шага пополам.

Пусть ρ_{n+1} — оценка локальной погрешности метода на шаге h в точке $(x_n + h)$. Если $|\rho_{n+1}| > \varepsilon$ — наперед заданной погрешности, то считается, что y_{n+1}^h не удовлетворяет заданной точности и нужно выбрать новый шаг, вдвое меньше прежнего $h^{(1)} = h/2$. Вновь просчитывается значение $y_{n+1}^{h^{(1)}}$ в новой точке $x_n + h^{(1)}$. Если новое значение погрешности $|\rho_{n+1}^{(1)}| > \varepsilon$, то точка $(x_n + h^{(1)})$ и значение $y_{n+1}^{h^{(1)}}$ опять исключаются из рассмотрения, шаг снова делится пополам $h^{(2)} = h^{(1)}/2$ и вычисления повторяются. Так продолжается до тех пор, пока при какой-то величине шага ($h^{(k)}$) оценка локальной погрешности ρ_{n+1} не станет меньше или равной ε :

$$|\rho_{n+1}| \leq \varepsilon.$$

После этого считается, что решение дифференциального уравнения продолжено до точки $x_{n+1} = x_n + h^{(k)}$.

Если же оценка локальной погрешности на шаге $h_n^{(k)} = x_{n+1} - x_n$ становится много меньше ε , то есть удовлетворяет неравенству

$$|\rho_{n+1}| \leq \varepsilon/M,$$

где M — некоторая константа, то считается, что достигнута точность, превышающая заданную, и шаг интегрирования удваивается: $h^{(k+1)} = 2h^{(k)}$.

Если выполняется неравенство

$$\varepsilon/M \leq |\rho_{n+1}| \leq \varepsilon,$$

то считается, что полученное в точке x_{n+1} решение удовлетворяет заданной точности, и шаг интегрирования остается без изменения: $h^{(k+1)} = h^{(k)}$. Дальнейшее решение уравнения производится из точки x_{n+1} с шагом $h_{n+1} = h^{(k)}$.

Таким образом обеспечивается выбор величины шага в зависимости от характера поведения решения дифференциального уравнения. Обычно полагается $M = 2^p$, где p – порядок аппроксимации метода.

3.4.3. Выбор максимальной для данной точки длины шага

Локальная погрешность метода в точке x_{n+1} , как видно из предыдущего, равна

$$\rho_{n+1} \cong \psi(x_n, y_n) h^{p+1}.$$

Если $|\rho_{n+1}| > \varepsilon$, то метод не достигает требуемой точности при данном h и вычисленное значение y_{n+1} вместе с точкой $(x_n + h)$ исключается из рассмотрения, а для решения выбирается новый размер шага из соотношения

$$h_\varepsilon = \alpha h,$$

где α находится из условия выполнения равенства

$$|\psi(x_n, y_n) h_\varepsilon^{p+1}| = \varepsilon,$$

$$|\psi(x_n, y_n) h^{p+1} \alpha^{p+1}| = \varepsilon \Rightarrow \alpha^{p+1} |\rho_{n+1}| = \varepsilon,$$

$$\alpha = \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon}{|\rho_{n+1}|}} \Rightarrow h_\varepsilon = \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon}{|\rho_{n+1}|}} h.$$

3.5. Методы вложенного типа. Оценка локальной погрешности

Группу методов вложенного типа на основе формул Рунге–Кутты предложили Ингленд, Фельберг и др. [10, 15]. Основная идея этих методов заключается в получении оценки локальной погрешности численного решения путем применения двух методов разного порядка точности, p и $(p+1)$, но использующих один и тот же набор вычисленных значений функций k_i , то есть функций $f(x, u)$.

Пусть имеется два метода типа Рунге–Кутта p и $(p+1)$ порядков аппроксимации $O(h^p)$ и $O(h^{p+1})$, использующие одни и те же функции k_i , но разные коэффициенты $\sigma_i^{(p)}$ и $\sigma_i^{(p+1)}$:

$$\frac{y_{n+1}^{(p)} - y_n}{h} = \sum_{i=1}^m \sigma_i^{(p)} k_i; \quad \psi_n = O(h^p); \quad (3.21)$$

$$\frac{y_{n+1}^{(p+1)} - y_n}{h} = \sum_{i=1}^m \sigma_i^{(p+1)} k_i; \quad \psi_n = O(h^{p+1}). \quad (3.22)$$

Оценка локальной погрешности ρ_{n+1} в этом случае, как и в способе Рунге, производится асимптотическим методом:

$$\rho_{n+1}^{(p)} = u(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(p)} = O(h^{(p+1)});$$

$$\rho_{n+1}^{(p+1)} = u(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(p+1)} = O(h^{(p+2)}).$$

Здесь $u(x_{n+1})$ — точное решение дифференциального уравнения (3.1); $y_{n+1}^{(p)}$, $y_{n+1}^{(p+1)}$ — решения разностных уравнений (3.21) и (3.22) соответственно. Отсюда локальная погрешность для метода (3.21), после сохранения членов главного порядка, будет равна

$$\rho_{n+1}^{(p)} = y_{n+1}^{(p+1)} - y_{n+1}^{(p)} + O(h^{p+2}) = \sum_{i=1}^m h k_i (\sigma_i^{(p+1)} - \sigma_i^{(p)}). \quad (3.23)$$

Это значение $\rho_{n+1}^{(p)}$ обычно применяется в качестве контрольной величины для оценки локальной погрешности метода (3.21) сверху.

Используя эту идею, Мерсон предложил следующие модификации метода Рунге–Кутты:

$$\frac{y_{n+1}^{(3)} - y_n}{h} = \frac{1}{10} (k_1 + 3k_3 + 4k_4 + 2k_5); \quad \psi_n = O(h^3); \quad (3.24)$$

$$\frac{y_{n+1}^{(4)} - y_n}{h} = \frac{1}{6} (k_1 + 4k_4 + k_5); \quad \psi_n = O(h^4); \quad (3.25)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n);$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right);$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{6}k_1 + \frac{h}{6}k_2\right);$$

$$k_4 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{8}k_1 + 3\frac{h}{8}k_3\right);$$

$$k_5 = f\left(x_n + h, y_n + \frac{h}{2}k_1 - 3\frac{h}{2}k_3 + 2hk_4\right).$$

Локальная погрешность (3.23) метода (3.24) в этом случае может быть оценена следующим выражением:

$$\rho_{n+1}^{(3)} = \frac{h}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5) + O(h^4). \quad (3.26)$$

Этот способ оценки локальной погрешности более экономичен в сравнении со способом Рунге. Он требует пяти вычислений функции $f(x, u)$, тогда как в способе Рунге функцию $f(x, u)$ приходится вычислять восемь раз.

Фельберг разработал множество методов вложенного типа. Например, методы четвертого и пятого порядков точности:

$$\frac{y_{n+1}^{(4)} - y_n}{h} = \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5; \quad \psi_n = O(h^4); \quad (3.27)$$

$$\frac{y_{n+1}^{(5)} - y_n}{h} = \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6; \quad \psi_n = O(h^5); \quad (3.28)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n);$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4}k_1\right);$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{3h}{32}k_1 + \frac{9h}{32}k_2\right);$$

$$k_4 = f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932}{2197}hk_1 - \frac{7200}{2197}hk_2 + \frac{7296}{2197}hk_3\right);$$

$$k_5 = f\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}hk_1 - 8hk_2 + \frac{3680}{513}hk_3 - \frac{845}{4104}hk_4\right);$$

$$k_6 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}hk_1 + 2hk_2 - \frac{3544}{2565}hk_3 + \frac{1859}{4104}hk_4 - \frac{11}{40}hk_5\right).$$

Локальная погрешность метода (3.27) имеет порядок $O(h^5)$:

$$\rho_{n+1}^{(4)} = h\left(\frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 + \frac{127}{6840}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right). \quad (3.29)$$

При оценке по способу Рунге локальной погрешности потребовалось бы одиннадцать раз вычислять правую часть дифференциального уравнения $f(x, u)$ вместо шести в методе Фельберга.

Ингленд, в свою очередь, предложил следующие формулы четвертого и пятого порядков:

$$\frac{y_{n+1}^{(4)} - y_n}{h} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4); \quad \psi_n = O(h^4); \quad (3.30)$$

$$\frac{y_{n+1}^{(5)} - y_n}{h} = \frac{1}{336}(14k_1 + 35k_4 + 162k_5 + 125k_6); \quad \psi_n = O(h^5); \quad (3.31)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n);$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right);$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{4}k_1 + \frac{h}{4}k_2\right);$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n - hk_2 + 2hk_3);$$

$$k_5 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{h}{27}(7k_1 + 10k_2 + k_4)\right);$$

$$k_6 = f\left(x_n + \frac{1}{5}h, y_n + \frac{h}{625}(28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)\right).$$

Локальная погрешность формулы (3.30) имеет порядок $O(h^5)$:

$$\rho_{n+1}^{(4)} = \frac{h}{336}(-42k_1 - 224k_3 - 21k_4 + 162k_5 + 125k_6). \quad (3.32)$$

В этом случае экономия при вычислении локальной погрешности (3.30) такая же, как и методе Фельберга (3.27).

3.6. Доказательство сходимости методов Рунге–Кутты

Сходимость методов Рунге–Кутты следует из *теоремы*:

Если численный метод устойчив и аппроксимирует исходную дифференциальную задачу и начальные данные с порядком точности $O(h^p)$, то он сходится на отрезке $(x_0, X]$ к решению дифференциальной задачи с порядком $O(h^p)$.

Доказательство. Пусть $z_n = y_n - u(x_n)$ — погрешность решения задачи. Основное уравнение метода Рунге–Кутты, как известно, имеет вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \sum_{i=1}^m k_i(y_n) \sigma_i, \quad (3.33)$$

$$k_i(y_n) = f\left(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} h b_{ij} k_j(y_n)\right), \quad i = 2, 3, \dots, m; \quad k_1(y_n) = f(x_n, y_n).$$

Подставим в уравнение (3.33) вместо y_n и y_{n+1} выражения типа $y_n = z_n + u(x_n)$, а справа добавим и вычтем $\sum_{i=1}^m k_i(u_n) \sigma_i$, где

$$k_i(u) = f\left(x_n + a_i h, u_n + \sum_{j=1}^{i-1} h b_{ij} k_j(u_n)\right), \quad i = 2, 3, \dots, m; \quad k_1(u_n) = f(x_n, u_n).$$

В результате получаем уравнение для погрешности решения

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = \psi_n + \varphi_n, \quad (3.34)$$

где

$$\psi_n = -\frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \sum_{i=1}^m k_i(u_n) \sigma_i; \quad (3.35)$$

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^m (k_i(u_n + z_n) - k_i(u_n)) \sigma_i.$$

Функция ψ_n есть погрешность аппроксимации метода (3.33) на решении исходной задачи (3.1) (или, иначе, невязка).

Функция φ_n обращается в нуль, если f не зависит от решения задачи u . В общем случае φ_n пропорциональна погрешности z_n . Так, по формуле конечных приращений имеем

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^m \sigma_i \frac{\partial k_i(x, u(x_n) + \theta z_n)}{\partial u(x_n)} z_n, \quad |\theta| \leq 1.$$

Отсюда получается оценка $|\varphi_n| \leq C z_n$, где $C = \text{const}$, в силу ограниченности производных функции $f(x, u)$ и, следовательно, производных функций $k_i(x, u)$ по второму аргументу, согласно теореме Коши о существовании решения дифференциального уравнения.

Подставляя найденную оценку функции φ_n и функцию ψ_n в уравнение (3.34), получаем выражение для оценки погрешности решения в точке x_{n+1} :

$$|z_{n+1}| \leq |z_n + h\psi(x_n, u_n) + hCz_n| \leq |z_n(1 + hC)| + h|\psi(x_n, u_n)|.$$

Откуда методом индукции получаем оценку погрешности решения z_n :

$$|z_1| \leq |z_0|(1 + hC) + h|\psi(x_0, u_0)|;$$

$$|z_2| \leq |z_1|(1 + hC) + h|\psi(x_1, u_1)| \leq |z_0|(1 + hC)^2 +$$

$$+ h(|\psi(x_1, u_1)| + (1 + hC)|\psi(x_0, u_0)|);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|z_{n+1}| \leq |z_0|(1 + hC)^{n+1} + h \sum_{k=0}^n |\psi(x_k, u_k)| (1 + hC)^k.$$

Поскольку задача решается на ограниченном отрезке $x_0 < x \leq X$, при любых n и h выполняется неравенство $x_n = x_0 + nh \leq X$. Огрубляя оценку, получим неравенство

$$|z_{n+1}| \leq |z_0|e^{XC} + Xe^{CX} \max_{0 \leq j \leq n-1} |\psi_j|.$$

Аппроксимируя начальные данные с погрешностью $O(h^p)$, равной невязке метода $O(h^p)$, окончательно имеем оценку погрешности решения

$$|z_{n+1}| \leq Xe^{XC} O(h^p),$$

где e^{XC} есть константа, то есть погрешность решения порядка $O(h^p)$.

Заключение. Если правая часть уравнения $f(x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой $L < C$, начальные данные аппроксимируются с погрешностью $O(h^p)$, а ψ_i — невязка метода Рунге–Кутты определена согласно условию (3.35) и имеет порядок $O(h^p)$, то для погрешности метода при $nh \leq X$ справедлива оценка

$$|y_n - u(x_n)| \leq e^{CX} O(h^p) + Xe^{CX} \max_{0 \leq j \leq n-1} |\psi_j| \approx O(h^p).$$

4. МНОГОШАГОВЫЕ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

4.1. Формулировка методов

Для решения задачи Коши

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \quad \text{для } x > x_0, \quad u(x_0) = u_0 \quad (4.1)$$

введем сетку $\omega_h = \{x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots\}$ с постоянным шагом $h > 0$. Введем сеточные функции $y_n = y(x_n)$, $f_n = f(x_n, y_n)$, $u_n = u(x_n)$, определенные на этой сетке ω_h .

Линейным m -шаговым разностным методом называется система разностных уравнений:

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_m y_{n-m}}{h} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \dots + b_m f_{n-m} \quad (4.2)$$

или в компактной форме:

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k y_{n-k}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k f_{n-k},$$

определенная при $n = m, (m + 1), \dots$, где a_k, b_k — числовые коэффициенты, не зависящие от n , $k = 0, 1, \dots, m$, причем $a_0 \neq 0$. Уравнение (4.2) — это рекуррентное соотношение по определению нового значения $y_n = y(x_n)$ через найденные ранее значения $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}$.

Расчет начинается с $n = m$, то есть с уравнения

$$\frac{a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + a_2 y_{m-2} + \dots + a_m y_0}{h} = b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + \dots + b_m f_0.$$

Таким образом, для начала расчета необходимо задать m начальных значений y_0, y_1, \dots, y_{m-1} . Значение y_0 берется из постановки исходной задачи (4.1) — $y_0 = u_0$. Величины y_1, y_2, \dots, y_{m-1} можно вычислить, например, с помощью метода Рунге–Кутты. Далее будем предполагать, что начальные значения y_1, y_2, \dots, y_{m-1} известны. В отличие от методов Рунге–Кутты в m -шаговых методах (4.2) правые части вычисляются только в точках основной сетки ω_h .

Метод (4.2) называется явным, если $b_0 = 0$, поскольку искомое значение y_n выражается явно через предыдущие значения y_1, y_2, \dots, y_{m-1} . Если $b_0 \neq 0$, метод называется неявным. В этом случае для нахождения y_n приходится решать нелинейное уравнение

$$\frac{a_0}{h} y_n - b_0 f(x_n, y_n) = F[y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}],$$

где

$$F[y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}] = \sum_{k=1}^m \left(b_k f_{n-k} - \frac{a_k}{h} y_{n-k} \right).$$

Обычно это уравнение решают каким-либо итерационным методом, выбирая некоторое начальное приближение, например, $y_n^{(0)} = y_{n-1}$.

Поскольку коэффициенты уравнения (4.2) определены с точностью до множителя, для устранения произвола полагают

$$\sum_{k=0}^m b_k = 1. \quad (4.3)$$

Это означает, что правая часть разностного уравнения (4.2) аппроксимирует правую часть дифференциального уравнения (4.1).

На практике наибольшее распространение получили методы Адамса, представляющие собой частный случай многошаговых методов (4.2), когда производная $u'(x)$ аппроксимируется только по двум точкам x_n и x_{n-1} , то есть коэффициенты a_k принимают значения:

$$a_0 = -a_1 = 1; \quad a_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots, m.$$

Методы Адамса имеют вид

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k f_{n-k}. \quad (4.4)$$

При $b_0 = 0$ методы Адамса называются явными, в случае $b_0 \neq 0$ — неявными.

4.2. Уравнение для погрешности

Пусть поставлена задача Коши

$$\frac{du(x)}{dx} = f(x, u) \quad \text{при } x > x_0, \quad u(x_0) = u_0. \quad (4.5)$$

Для ее решения используем m -шаговый разностный метод

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k y_{n-k}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k f_{n-k}, \quad (4.6)$$

где $n = m, (m+1), \dots$. Начальные значения y_0, y_1, \dots, y_{m-1} заданы.

Получим уравнение для погрешности $z_n = y_n - u(x_n)$. Для этого подставим в уравнение (4.6) вместо y_j выражение $y_j = u_j + z_j$ для $j = n, (n-1), \dots, (n-m)$:

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k z_{n-k}}{h} = -\sum_{k=0}^m \frac{a_k u_{n-k}}{h} + \sum_{k=0}^m b_k f(x_{n-k}, u_{n-k} + z_{n-k}).$$

Добавим к правой части этого уравнения и вычтем из нее выражение

$$\sum_{k=0}^m b_k f(x_{n-k}, u_{n-k}).$$

В результате получим

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k z_{n-k}}{h} = \psi_{n-m} + \varphi_{n-m}, \quad n = m, (m+1), \dots, \quad (4.7)$$

где

$$\psi_{n-m} = -\sum_{k=0}^m \frac{a_k u_{n-k}}{h} + \sum_{k=0}^m b_k f(x_{n-k}, u_{n-k}); \quad (4.8)$$

$$\varphi_{n-m} = \sum_{k=0}^m b_k (f(x_{n-k}, u_{n-k} + z_{n-k}) - f(x_{n-k}, u_{n-k})). \quad (4.9)$$

Здесь ψ_{n-m} — погрешность аппроксимации (невязка) метода. Функция φ_{n-m} зависит нелинейно от z_j , $j = n, (n-1), \dots, (n-m)$. Её вид определяется функцией $f(x, u)$. Будем предполагать, что $f(x, u)$ удовлетворяет условиям Липшица по второму аргументу, то есть

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|$$

для всех x, u_1, u_2 из рассматриваемой области. Тогда из (4.9) следует оценка

$$|\varphi_{n-m}| \leq bL \sum_{k=0}^m |z_{n-k}|,$$

где $b = \max(|b_0|, |b_1|, \dots, |b_m|)$.

4.3. Погрешность аппроксимации многошаговых методов

Погрешностью аппроксимации многошагового разностного метода на решении дифференциальной задачи (невязкой разностного метода) называется функция (4.8):

$$\psi_{n-m} = -\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{h} u_{n-k} + \sum_{k=0}^m b_k f(x_{n-k}, u_{n-k}), \quad n = m, (m+1), \dots,$$

которую можно получить также подстановкой точного решения $u(x)$ дифференциальной задачи (4.5) в разностное уравнение (4.6). Погрешность аппроксимации определяется при $h \rightarrow 0$ в зависимости от выбора коэффициентов $a_k, b_k, k = 0, 1, \dots, m$. При этом предполагается, что все рассматриваемые функции обладают необходимой гладкостью. Разлагая функции $u_{n-k} = u(x_n - kh)$ в точке $x = x_n$ по формуле Тейлора до членов порядка p , получаем

$$u_{n-k} = \sum_{l=0}^p \frac{(-kh)^l u^{(l)}(x_n)}{l!} + O(h^{p+1}), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Аналогично разлагаем функцию $f(x_{n-k}, u_{n-k})$ в ряд Тейлора до членов порядка $(p-1)$

$$f(x_{n-k}, u_{n-k}) = u'(x_n - kh) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-kh)^l u^{(l+1)}(x_n)}{l!} + O(h^p), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Подставляя эти разложения в выражение невязки (4.8), будем иметь

$$\psi_{n-m} = -\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{h} \left(\sum_{l=0}^p \frac{(-kh)^l u^{(l)}(x_n)}{l!} \right) + \sum_{k=0}^m b_k \left(\sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-kh)^l u^{(l+1)}(x_n)}{l!} \right) + O(h^p) =$$

$$= -\sum_{l=0}^p \left(\sum_{k=0}^m \frac{a_k (-kh)^l u^{(l)}(x_n)}{h^l} \right) + \sum_{l=1}^p \left(\sum_{k=0}^m \frac{b_k (-kh)^{l-1} u^{(l)}(x_n)}{(l-1)!} \right) + O(h^p).$$

После преобразований приходим к выражению

$$\psi_{n-m} = -\left(\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{h} \right) u(x_n) + \sum_{l=1}^p \left(\sum_{k=0}^m (-kh)^{l-1} \left(a_k \frac{k}{l} + b_k \right) \right) \frac{u^{(l)}(x_n)}{(l-1)!} + O(h^p).$$

Следовательно, погрешность аппроксимации имеет порядок $O(h^p)$, если выражения в скобках будут равны нулю:

$$\sum_{k=0}^m a_k = 0; \quad (4.10)$$

$$\sum_{k=0}^m k^{l-1} (ka_k + lb_k) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, p. \quad (4.11)$$

Уравнения (4.10), (4.11) вместе с условием (4.3) $\sum_{k=0}^m b_k = 1$ образуют систему из $(p+2)$ линейных алгебраических уравнений относительно $2(m+1)$ неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$. Упростим систему (4.11), рассмотрев случай $l = 1$,

$$\sum_{k=0}^m ka_k + \sum_{k=0}^m b_k = 0,$$

и учтем условие нормировки (4.3). Тогда получим уравнение

$$\sum_{k=0}^m ka_k = -1.$$

Для отыскания коэффициентов a_k и b_k получаем систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^m ka_k = -1;$$

$$\sum_{k=1}^m k^{l-1} (ka_k + lb_k) = 0, \quad l = 2, 3, \dots, p, \quad (4.12)$$

которая содержит p уравнений и $2m$ неизвестных $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$. Коэффициенты a_0, b_0 вычисляются по формулам:

$$a_0 = -\sum_{k=1}^m a_k; \quad b_0 = 1 - \sum_{k=1}^m b_k. \quad (4.13)$$

Чтобы система (4.12) не была переопределена, необходимо потребовать, чтобы $p \leq 2m$. Это требование означает, что порядок аппроксимации линейных m -шаговых разностных методов не может превосходить $2m$.

Наивысший достижимый порядок аппроксимации неявных m -шаговых методов равен $2m$, а явных — $(2m - 1)$. Если в системе (4.12) отбросить последние n уравнений, $n = 1, 2, \dots, (p - 1)$, то получим условия, обеспечивающие порядок аппроксимации $(p - n)$.

Для методов Адамса (4.4) условия p -го порядка аппроксимации (4.12), (4.13) принимают вид

$$l \sum_{k=1}^m k^{l-1} b_k = 1, \quad l = 1, 2, \dots, p; \quad b_0 = 1 - \sum_{k=1}^m b_k. \quad (4.14)$$

Следовательно, наивысший порядок аппроксимации m -шагового неявного метода Адамса равен $(m + 1)$, а наивысший порядок аппроксимации явного метода Адамса ($b_0 = 0$) равен m .

4.4. Примеры многошаговых разностных методов Адамса

Наивысший порядок аппроксимации явных m -шаговых методов Адамса

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \sum_{k=1}^m b_k f_{n-k} \quad (4.15)$$

равен m . Согласно уравнениям (4.14) условия m -го порядка аппроксимации имеют вид:

$$\sum_{k=1}^m k^{l-1} b_k = \frac{1}{l}, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (4.16)$$

Решая систему (4.16), можно найти коэффициенты метода наивысшего порядка аппроксимации уравнений (4.15) при каждом конкретном m .

Так, при $m = 1$ получается метод Эйлера

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = f_{n-1}.$$

При $m = 2, 3, 4, 5$ получаются следующие явные методы m -го порядка аппроксимации:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{3}{2} f_{n-1} - \frac{1}{2} f_{n-2}, \quad m = 2, \quad \psi_{n-m} = O(h^2) \quad (4.17)$$

с локальной погрешностью $\rho = \frac{5}{12} h^3 u^{(3)}(x)$;

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{12} (23 f_{n-1} - 16 f_{n-2} + 5 f_{n-3}), \quad m = 3, \quad \psi_{n-m} = O(h^3) \quad (4.18)$$

с локальной погрешностью $\rho = \frac{3}{8}h^4 u^{(4)}(x)$;

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{24}(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}), \quad m = 4, \quad \psi_{n-m} = O(h^4) \quad (4.19)$$

с локальной погрешностью $\rho = \frac{251}{720}h^5 u^{(5)}(x)$;

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{720}(1901f_{n-1} - 2774f_{n-2} + 2616f_{n-3} - 1274f_{n-4} + 251f_{n-5}), \quad m = 5, \quad (4.20)$$

$\psi_{n-m} = O(h^5)$ с локальной погрешностью $\rho = \frac{95}{288}h^6 u^{(6)}(x)$.

Для неявных m -шаговых методов Адамса

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k f_{n-k} \quad (4.21)$$

наивысший порядок аппроксимации равен $(m + 1)$. Коэффициенты метода (4.21) наивысшего порядка аппроксимации находятся из системы (4.14).

При $m = 1$ получается метод второго порядка аппроксимации $O(h^2)$:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{2}(f_n + f_{n-1}), \quad (4.22)$$

называемый методом трапеций с локальной погрешностью $\rho = -\frac{1}{12}h^3 u^{(3)}(x)$.

При $m = 2, 3, 4$ получаются, соответственно, методы $(m + 1)$ -го порядка аппроксимации:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{12}(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2}); \quad (4.23)$$

порядок аппроксимации $O(h^3)$ и локальная погрешность $\rho = -\frac{1}{24}h^4 u^{(4)}(x)$;

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{24}(9f_n + 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3}); \quad (4.24)$$

порядок аппроксимации $O(h^4)$, локальная погрешность $\rho = -\frac{19}{720}h^5 u^{(5)}(x)$;

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{720}(251f_n + 646f_{n-1} - 264f_{n-2} + 106f_{n-3} - 19f_{n-4}); \quad (4.25)$$

порядок аппроксимации $O(h^5)$, локальная погрешность $\rho = -\frac{3}{160}h^6 u^{(6)}(x)$.

Для решения задачи неявными методами необходимо использовать какой-либо итерационный метод. Например, для неявного метода Адамса 4-го порядка можно использовать метод простой итерации

$$\begin{aligned} \frac{y_n^{(s+1)} - y_{n-1}}{h} &= \\ &= \frac{1}{24} (9f(x_n, y_n^{(s)}) + 19f(x_{n-1}, y_{n-1}) - 5f(x_{n-2}, y_{n-2}) + f(x_{n-3}, y_{n-3})), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где s — номер итерации, $s = 0, 1, \dots$. В качестве начального значения $y_n^{(0)}$ можно взять решение, полученное с помощью явного метода Адамса 3-го порядка, то есть метода

$$\frac{y_n^{(0)} - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{12} (23f(x_{n-1}, y_{n-1}) - 16f(x_{n-2}, y_{n-2}) + 5f(x_{n-3}, y_{n-3})).$$

Записывая выражение (4.26) в виде

$$y_n^{(s+1)} = \frac{3h}{8} f(x_n, y_n^{(s)}) + F,$$

где
$$F = y_{n-1} + \frac{h}{24} (19f(x_{n-1}, y_{n-1}) - 5f(x_{n-2}, y_{n-2}) + f(x_{n-3}, y_{n-3})),$$

получаем, что если $\left| \frac{df}{dy} \right| \leq M$, $M = \text{const}$, то итерационный метод сходится при условии

$$\frac{3hM}{8} < 1,$$

которое выполнено при достаточно малом шаге интегрирования h .

Формулы Адамса можно получить и другим способом. Пусть функция $f(x, u)$ из уравнения $u' = f(x, u)$ на отдельных отрезках интегрирования аппроксимируется некоторым полиномом от x — $f(x, u) = F(x)$. Тогда, проинтегрировав исходное уравнение $u' = f(x, u)$ на участке (x_{n-1}, x_n) , получим

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} u' dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, u) dx = u(x_n) - u(x_{n-1}) \approx \int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x) dx,$$

или, в принятых нами обозначениях,

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x) dx.$$

Используя в качестве $F(x)$ некоторый интерполяционный полином степени не выше k — $P_k(x)$ и вычисляя этот интеграл, получаем соответствующие формулы.

Например, при $k = 0$ $P_0(x) = f(x_{n-1}, y_{n-1}) = \text{const}$ имеем:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = f(x_{n-1}, y_{n-1}); \quad p=1;$$

при $k = 1$ $P_1(x) = \frac{(x - x_{n-2})f_{n-1}}{h} - \frac{(x - x_{n-1})f_{n-2}}{h}$ получаем:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = f_{n-1} + \frac{\Delta f_{n-1}}{2}; \quad p=2;$$

при $k = 2$:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = f_{n-1} + \frac{\Delta f_{n-1}}{2} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{n-1}; \quad p=3;$$

при $k = 3$:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = f_{n-1} + \frac{\Delta f_{n-1}}{2} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{n-1} + \frac{3}{8} \Delta^3 f_{n-1}; \quad p=4.$$

Здесь приняты обозначения:

$$f_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1});$$

$$\Delta f_{n-1} = f_{n-1} - f_{n-2};$$

$$\Delta^2 f_{n-1} = f_{n-1} - 2f_{n-2} + f_{n-3};$$

$$\Delta^3 f_{n-1} = f_{n-1} - 3f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4}.$$

Этот способ использован также при получении расчётных формул в методе Милна.

4.5. Метод Милна

Для получения формул Милна обычно используется первая интерполяционная формула Ньютона для производной u' в точке $x_k = (x_0 + kh)$ с разностями до третьего порядка:

$$u'(x) = u'_k + q \Delta u'_k + \frac{1}{2} (q^2 - q) \Delta^2 u'_k + \frac{1}{6} (q^3 - 3q^2 + 2q) \Delta^3 u'_k, \quad (4.27)$$

где $q = \frac{x - x_k}{h}$. Полагая $k = (n - 4)$ в формуле (4.27) и интегрируя её почленно по x в пределах от x_{n-4} до x_n , получим

$$\int_{x_{n-4}}^{x_n} u'(x) dx = \int_{x_{n-4}}^{x_n} \left[u'_{n-4} + q \Delta u'_{n-4} + \frac{1}{2} (q^2 - q) \Delta^2 u'_{n-4} + \frac{1}{6} (q^3 - 3q^2 + 2q) \Delta^3 u'_{n-4} \right] dx;$$

Так как $q = \frac{x - x_k}{h}$ и $dx = h dq$, интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-4} &= h \left\{ u'_{n-4} \int_0^4 dq + \Delta u'_{n-4} \int_0^4 q dq + \Delta^2 u'_{n-4} \int_0^4 \frac{q^2 - q}{2} dq + \Delta^3 u'_{n-4} \int_0^4 \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} dq \right\} = \\ &= h \left(4u'_{n-4} + 8\Delta u'_{n-4} + \frac{20}{3} \Delta^2 u'_{n-4} + \frac{8}{3} \Delta^3 u'_{n-4} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Подставляя выражения конечных разностей:

$$\Delta u'_{n-4} = u'_{n-3} - u'_{n-4};$$

$$\Delta^2 u'_{n-4} = u'_{n-2} - 2u'_{n-3} + u'_{n-4};$$

$$\Delta^3 u'_{n-4} = u'_{n-1} - 3u'_{n-2} + 3u'_{n-3} - u'_{n-4}$$

в уравнение (4.28), после упрощений получаем первую формулу Милна:

$$u_n = u_{n-4} + \frac{4h}{3} (2u'_{n-3} - u'_{n-2} + 2u'_{n-1}).$$

Используя дифференциальное уравнение $u' = f(x, u)$ и заменяя u_n на y_n , формулу Милна приводим к окончательному виду:

$$y_n = y_{n-4} + \frac{4h}{3} (2f_{n-3} - f_{n-2} + 2f_{n-1}). \quad (4.29)$$

Для получения второй формулы Милна положим в формуле (4.27) $k = (n - 2)$ и проинтегрируем обе части получившегося выражения по x от x_{n-2} до x_n :

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} u'(x) dx = h \int_0^2 \left[u'_{n-2} + q \Delta u'_{n-2} + \frac{1}{2} (q^2 - q) \Delta^2 u'_{n-2} + \frac{1}{6} (q^3 - 3q^2 + 2q) \Delta^3 u'_{n-2} \right] dq.$$

Отсюда, после аналогичных предыдущему операций, получим

$$u_n - u_{n-2} = h \left(2u'_{n-2} + 2\Delta u'_{n-2} + \frac{1}{3} \Delta^2 u'_{n-2} \right). \quad (4.30)$$

Здесь $\frac{1}{6} \int_0^2 (q^3 - 3q^2 + 2q) dq = 0$. Подставляя в уравнение (4.30) значения конечных разностей $\Delta u'_{n-2} = u'_{n-1} - u'_{n-2}$; $\Delta^2 u'_{n-2} = u'_n - 2u'_{n-1} + u'_{n-2}$, получаем вторую формулу Милна:

$$u_n = u_{n-2} + \frac{h}{3}(u'_{n-2} + 4u'_{n-1} + u'_n)$$

или, окончательно, после замены u_n на y_n и u'_n на $f(x_n, y_n)$,

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n). \quad (4.31)$$

Если $f(x, y)$ не зависит от y , то есть равняется $f(x)$, то формула (4.31) идентична формуле Симпсона для вычисления определенного интеграла

$$u_n - u_{n-2} = \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx.$$

Оценим погрешности формул Милна (4.29) и (4.31) $\varepsilon_i^{(1)}$, $\varepsilon_i^{(2)}$ по величине отброшенных членов полинома Ньютона:

$$\varepsilon_n^{(1)} \approx h \int_0^4 \frac{1}{24} (q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q) \Delta^4 u'_{n-4} dq = \frac{28}{90} h \Delta^4 u'_{n-4} = \frac{28}{90} h \Delta^4 f_{n-4}; \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_n^{(2)} \approx h \int_0^2 \frac{1}{24} (q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q) \Delta^4 u'_{n-2} dq = -\frac{h}{90} \Delta^4 u'_{n-2} = -\frac{h}{90} \Delta^4 f_{n-2}. \quad (4.33)$$

Полагая $\Delta^4 f_n = \text{const}$ на интервале длины $4h$, получим

$$\varepsilon_n^{(1)} = -28\varepsilon_n^{(2)}.$$

Так как решение дифференциальной задачи (4.5) равно $u_n = y_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)}$ и $u_n = y_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(1)} = y_n^{(1)} - 28\varepsilon_n^{(2)}$, где $y_n^{(1)}$ — решение получено по формуле (4.29), а $y_n^{(2)}$ — по формуле (4.31), то

$$\varepsilon_n^{(2)} = \frac{1}{29}(y_n^{(1)} - y_n^{(2)}).$$

При малых h $\frac{\Delta^4 u'_n}{h^4} \approx u^{(5)}(x_n)$. Тогда интегральная погрешность согласно (4.32) и (4.33) для метода Милна есть

$$E = \frac{h^5}{90} M_5 N = \frac{b-a}{90} M_5 h^4,$$

где $M_5 = \max |u^{(5)}(x)|$ при $a \leq x \leq b$; $h = \frac{b-a}{N}$, то есть метод Милна четвёртого порядка точности (здесь h — шаг интегрирования; N — число точек разбиения отрезка (a, b)). Погрешность его порядка $O(h^4)$.

Метод Милна считается одним из наиболее простых и удобных. Для начала счета он требует задания решения в четырёх начальных точках: y_0, y_1, y_2, y_3 . Значение y_0 берется из начальных данных дифференциальной задачи, а y_1, y_2, y_3 получаются с помощью какого-либо метода Рунге–Кутта. Последующие значения y_n для $n = 4, 5, \dots$ находятся по следующей схеме:

1) вычисляется первое приближение $y_n^{(1)}$ по формуле: (4.29):

$$y_n^{(1)} = y_{n-4} + \frac{4h}{3}(2f_{n-3} - f_{n-2} + 2f_{n-1}) \quad \text{для } n = 4, 5, \dots;$$

2) затем находится второе приближение (окончательное) $y_n^{(2)}$ по формуле (4.31):

$$y_n^{(2)} = y_{n-2} + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n(x_n, y_n^{(1)})).$$

Локальная погрешность величины $y_n^{(2)}$ приближённо равна

$$\varepsilon_n = \frac{1}{29} |y_n^{(1)} - y_n^{(2)}|.$$

4.6. Решение дифференциальных уравнений с заданной погрешностью на каждом шаге

Главная задача численного интегрирования дифференциальных уравнений — это получение решения с заданной погрешностью на каждом шаге расчета. Эта задача связана с необходимостью определения локальной погрешности решения в каждой точке x_n и с изменением шага интегрирования. Если для методов типа Рунге–Кутта изменение шага не вызывает затруднений, то в случае многошаговых методов для расчета с новым шагом h приходится определять дополнительные данные на новой сетке с помощью интерполяционных полиномов высокой степени, либо вычислять их методом Рунге–Кутта соответствующего порядка.

Непосредственная оценка локальной погрешности решения на каждом шаге интегрирования связана с вычислением $(k+1)$ производных искомой функции, так как главный член локальной погрешности определяется выражением

$$\rho(x_n) = u(x_n) - y_n = C h^{k+1} u^{(k+1)}(\xi) + O(h^{k+2}).$$

Здесь $u(x_n)$ — решение дифференциального уравнения; y_n — решение разностного уравнения; C — некоторая константа; точка $\xi \in [x_{n-1}, x_n]$; h — шаг интегрирования; k — порядок погрешности разностного метода. Именно трудности вычисления $(k+1)$ -х производных $u^{(k+1)}(x)$ при определении локальной погрешности являются препятствием при использовании в расчетах как явных, так и неявных многошаговых методов по отдельности, а потому они редко используются на практике.

Оценка локальной погрешности существенно облегчается в методах прогноза-коррекции при совместном применении явных и неявных схем одного порядка точности. В результате полученные решения на этапах прогноза и коррекции используются для оценки локальной погрешности метода. Предположим, что методом прогноза-коррекции получено решение задачи y_{n-1} в точке x_{n-1} с заданной погрешностью ε . Пусть в используемом методе на этапе прогноза применяется явный метод k -го порядка точности с локальной погрешностью решения y_n в следующей точке x_n :

$$\rho^{(p)}(x_n) = u(x_n) - y_n^{(p)} = C^{(p)} h^{k+1} u^{(k+1)}(\xi_1),$$

а на этапе коррекции — неявный метод также k -го порядка точности с локальной погрешностью

$$\rho^{(c)}(x_n) = u(x_n) - y_n^{(c)} = C^{(c)} h^{k+1} u^{(k+1)}(\xi_2).$$

Здесь величины с индексами (p) и (c) относятся к данным этапов прогноза и коррекции соответственно; $C^{(p)}$, $C^{(c)}$ — известные константы; $u^{(k+1)}(\xi_i)$ — $(k+1)$ производные точного решения дифференциальной задачи $u(x)$, точки $\xi_i \in [x_{n-1}, x_n]$, $i = 1, 2$.

Для оценки локальной погрешности метода прогноза-коррекции целесообразно использовать обе схемы, явную и неявную, одного порядка аппроксимации, так как в этом случае, в предположении $u^{(k+1)}(\xi_1) \approx u^{(k+1)}(\xi_2)$, локальные погрешности на этапах прогноза и коррекции можно выразить друг через друга, исключив $u^{(k+1)}(\xi_i)$:

$$\rho^{(p)}(x_n) = \frac{C^{(p)}}{C^{(c)}} \rho^{(c)}(x_n);$$

$$\rho^{(c)}(x_n) = \frac{C^{(c)}}{C^{(p)}} \rho^{(p)}(x_n).$$

Записывая локальные погрешности в виде разности точного решения дифференциального уравнения и численного решения:

$$\rho^{(p)}(x_n) = u(x_n) - y_n^{(p)} = \frac{C^{(p)}}{C^{(c)}} \rho^{(c)}(x_n);$$

$$\rho^{(c)}(x_n) = u(x_n) - y_n^{(c)} = \frac{C^{(c)}}{C^{(p)}} \rho^{(p)}(x_n);$$

и вычитая из одного уравнения другое, получаем

$$y_n^{(c)} - y_n^{(p)} = \frac{C^{(p)} - C^{(c)}}{C^{(p)}} \rho^{(p)}(x_n).$$

Откуда следуют формулы для оценки локальной погрешности на каждом этапе:

$$\rho^{(p)}(x_n) = \frac{y_n^{(c)} - y_n^{(p)}}{C^{(p)} - C^{(c)}} C^{(p)};$$

$$\rho^{(c)}(x_n) = \frac{y_n^{(c)} - y_n^{(p)}}{C^{(p)} - C^{(c)}} C^{(c)}.$$

Полученную оценку локальной погрешности на этапе корректор затем сравниваем с заданной погрешностью решения ε на каждом шаге.

Если $|\rho^{(c)}(x_n)| > \varepsilon$, то шаг интегрирования h уменьшают обычно вдвое. При этом локальная ошибка согласно асимптотической оценке и предположению о малом изменении $u^{(k+1)}(\xi_i)$ на отрезке (x_{n-1}, x_n) уменьшается в $2^{(k+1)}$ раз.

Если же $|\rho^{(c)}(x_n)| < \varepsilon$, то шаг h увеличивают вдвое, вызывая возрастание локальной погрешности в $2^{(k+1)}$ раз.

Если такое изменение локальной погрешности с изменением шага интегрирования вдвое не устраивает, то можно подсчитать новое значение оптимального шага из условия равенства локальной погрешности заданной погрешности решения $\rho^{(c)}(x_n) = \varepsilon$:

$$\rho^{(c)}(x_n) = C^{(c)} h^{k+1} u^{(k+1)}(\xi_2) = \varepsilon;$$

$$h_{op} = h_n \sqrt[k+1]{\frac{\varepsilon}{\rho^{(c)}(x_n)}}.$$

Откуда следует, что оптимальный шаг интегрирования h_{op} возрастает, если локальная погрешность решения, полученная при шаге h_n , меньше заданной и наоборот.

Для получения решения в следующей точке x_n после изменения шага интегрирования необходимо получить $(m-1)$ новых начальных данных, соответствующих новому шагу интегрирования, в точках $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}$ на новой сетке ω_h^{new} по ранее сосчитанным значениям $y(x)$ в точках старой сетки ω_h^{old} . Это удобнее всего сделать с помощью интерполяционных полиномов

Эрмита, обладающих максимальной степенью аппроксимации при минимальном числе узлов интерполяции. Например, полином Эрмита при трех узлах интерполяции с остаточным членом порядка $O(h^6)$ имеет вид [10]:

$$H_5(x) = \sum_{i=1}^3 y_{n-i} \Phi_i(x) + \omega_2(x) \sum_{i=1}^3 H_2(x_{n-i}) \Phi_i(x),$$

где

$$\omega_2(x) = \prod_{i=1}^3 (x - x_{n-i}) = (x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3});$$

$$\Phi_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}; \quad \Phi_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}; \quad \Phi_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)};$$

$$H_2(x_{n-3}) = \frac{2hf_{n-3} + 3y_{n-3} - 4y_{n-2} + y_{n-1}}{4h^3}; \quad H_2(x_{n-2}) = \frac{2hf_{n-2} + y_{n-3} - y_{n-1}}{2h^3};$$

$$H_2(x_{n-1}) = \frac{2hf_{n-1} - y_{n-3} + 4y_{n-2} - 3y_{n-1}}{4h^3}.$$

Здесь $f_i = f(x_i, y_i)$ — правая часть дифференциального уравнения.

Вычисленные по этой формуле значения функции $y(x)$ в узлах новой сетки не изменяют главного члена локальной погрешности в формулах предиктор-корректор.

Приведенная формула Эрмита непосредственно пригодна для случая уменьшения шага интегрирования h . При небольшой модернизации она может использоваться и для случая увеличения шага h . В этом случае узлы интерполяции будут располагаться на расстоянии $2h$ друг от друга на старой сетке ω_h^{old} . В результате при переходе на новую сетку ω_h^{new} с увеличением h потребуется вдвое больше исходных данных, чем при уменьшении шага вдвое. Поэтому при выполнении расчетов с заданной погрешностью на каждом шаге необходимо сохранять в памяти машины вдвое больше расчетных данных, чем требуется для вычисления искомой функции в очередной расчетной точке.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ, СХОДИМОСТЬ И ПОГРЕШНОСТЬ

МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ

5.1. Устойчивость и сходимость m -шаговых разностных методов

Как показано в п. 4.3, наивысший порядок аппроксимации m -шагового разностного метода равен $p = 2m$. Однако установлено, что методы наивыс-

шего порядка неустойчивы, а потому не пригодны для расчетов. Введем необходимые для дальнейшего понятия.

Рассмотрим однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами $a_i, i = 0, 1, \dots, m$:

$$a_0 v_n + a_1 v_{n-1} + \dots + a_m v_{n-m} = 0, \quad n = m, (m+1). \quad (5.1)$$

Будем искать частные решения уравнения (5.1) в виде $v_n = q^n$, где q — число. Для этого, подставив функцию $v_{n-k} = q^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, m$ в (5.1) и сократив на q^{n-m} , получим уравнение

$$a_0 q^m + a_1 q^{m-1} + \dots + a_{m-1} q + a_m = 0, \quad (5.2)$$

которое называется характеристическим уравнением разностного уравнения (5.1) и метода (4.2).

Следовательно, уравнение (5.1) имеет решение q^n , если q является корнем характеристического уравнения (5.2). Если же корень q имеет кратность $r \geq 1$, то разностное уравнение, как показано, имеет частные решения вида

$$v_n = n^j q^n, \quad j = 0, 1, \dots, (r-1).$$

Если все корни q_1, q_2, \dots, q_m характеристического уравнения лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, а на границе единичного круга нет кратных корней, то считается, что m -шаговый метод (4.2) удовлетворяет условию корней.

Доказано:

1) что если m -шаговый метод удовлетворяет условию корней, то метод является устойчивым, то есть его решение ограничено при $h \rightarrow 0$;

2) что порядок аппроксимации p устойчивого неявного m -шагового метода удовлетворяет условиям $p \leq (m+1)$ при m нечетном и $p \leq (m+2)$ при m четном. Для явных m -шаговых устойчивых методов порядок аппроксимации не превосходит m ;

3) что если метод (4.2) удовлетворяет условию корней и условию Липшица $|f_u(x, u)| \leq L$ при $x_0 \leq x \leq X$, то при $(x_0 + mh) \leq x_n = (x_0 + nh) \leq X$, $n \geq m$ и всех достаточно малых h для его решения выполняется оценка

$$|y_n - u(x_n)| \leq M \left(\max_{0 \leq j \leq m-1} |y_j - u(x_j)| + \max_{0 \leq k \leq n-m} |\psi_k| \right).$$

Здесь ψ_k — погрешность аппроксимации; $|y_j - u(x_j)|, j = 0, 1, \dots, (m-1)$, — погрешности в задании начальных условий; M — константа, зависящая от L, X и не зависящая от n .

Отсюда следует, что если погрешности начальных данных $|y_j - u(x_j)|$ и аппроксимации $\psi_k, k = 0, 1, \dots$ являются величинами порядка $O(h^p), p > 0$, то численное решение задачи y_n сходится к точному решению дифференциаль-

ной задачи $u(x_n)$ с погрешностью $O(h^p)$, то есть метод сходится и имеет p -й порядок точности при $n > m$ — $|y_n - u(x_n)| = O(h^p)$.

Таким образом, исследование сходимости метода (4.2) сводится к анализу погрешности аппроксимации и проверке условия корней.

Отметим, что методы Адамса (4.4)

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k f(x_{n-k}, y_{n-k})$$

всегда удовлетворяют условию корней, так как для них характеристическое уравнение имеет единственный корень, равный $q = q_1 = 1$.

Примером метода, не удовлетворяющего условию корней, является явный двухшаговый метод, имеющий третий порядок аппроксимации

$$\frac{y_n + 4y_{n-1} - 5y_{n-2}}{6h} = \frac{2f_{n-1} + f_{n-2}}{3}. \quad (5.3)$$

Для него характеристическое уравнение имеет вид $q^2 + 4q - 5 = 0$. Решение его есть

$$q = -2 \pm \sqrt{4 + 5} = -2 \pm 3;$$

$$q_1 = 1; \quad q_2 = -5,$$

то есть второй корень не удовлетворяет условию корней, так как выходит за границу единичного круга. Следовательно, метод (5.3) неустойчив.

Другим примером метода, не удовлетворяющего условию корней, является явный двухшаговый метод второго порядка аппроксимации

$$\frac{y_n + y_{n-1} - 2y_{n-2}}{3h} = \frac{5f_{n-1} + f_{n-2}}{6}, \quad (5.4)$$

характеристическое уравнение которого $q^2 + q - 2 = 0$ имеет корни $q_1 = 1$, $q_2 = -2$, один из которых выходит за границу единичного круга. Это делает метод неустойчивым.

Решение задачи Коши (4.1) посредством неустойчивых методов, например, (5.3) и (5.4), дает осцилирующие, пилообразные, неограниченно возрастающие по модулю решения с уменьшением h и увеличением x , приводящие к переполнению разрядной сетки и останову ЭВМ.

5.2. Устойчивость по начальным данным однородного разностного уравнения

Решением задачи Коши разностного уравнения (5.1) является такая сеточная функция u_n , которая при всех $n \geq m$ удовлетворяет уравнению (5.1) и

принимает при $n = 0, 1, \dots, (m-1)$ заданные начальные значения u_0, u_1, \dots, u_{m-1} .

Если $a_0 \neq 0$, то уравнение (5.1) разрешается относительно v_n

$$v_n = -\frac{a_m}{a_0}v_{n-m} - \frac{a_{m-1}}{a_0}v_{n-m+1} - \dots - \frac{a_1}{a_0}v_{n-1}. \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что при $a_0 \neq 0$ решение задачи Коши существует и единственно.

Принято считать, что уравнение (5.1) устойчиво по начальным данным, если его решение при любых начальных значениях u_0, u_1, \dots, u_{m-1} удовлетворяет условию

$$|v_n| \leq M_1 \max_{0 \leq j < m-1} |u_j|, \quad n = m, (m+1), \dots, \quad (5.6)$$

где M_1 — не зависящая от n постоянная.

Таким образом, устойчивость означает равномерную по n ограниченность решения задачи Коши. Показано, что устойчивость уравнения полностью определяется расположением корней характеристического уравнения (5.2).

Считается, что выполнено условие корней, если все корни q_1, q_2, \dots, q_m характеристического уравнения (5.2) лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, а на границе единичного круга нет кратных корней.

Теорема. Условие корней необходимо и достаточно для устойчивости уравнения (5.1) по начальным данным.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть уравнение (5.1) имеет корень q , который $|q| > 1$. Задавая в качестве начальных данных функции $v_j = q^j, j = 0, 1, \dots, (m-1)$, получим решение $v_n = q^n, n \geq m$, неограниченно возрастающее при $n \rightarrow \infty$. Для точного решения невозможна оценка вида (5.6). Следовательно, условие $|q_n| < 1, n = 1, 2, \dots, m$, необходимо для устойчивости.

Если уравнение (5.2) имеет корень q кратности $r > 1$, для которого $q = 1$, то разностное уравнение (5.1), как показано, имеет решение $n^{r-1}q^n$, растущее при $n \rightarrow \infty$ как n^{r-1} . В этом случае оценка (5.6) также не выполняется.

Для проведения доказательства достаточности теоремы сделаем дополнительные построения. Запишем (5.5) в виде эквивалентной системы:

$$\begin{aligned} v_{n-m+1} &= v_{n-m+1}, \dots, v_{n-1} = v_{n-1}, \\ v_n &= -\frac{a_m}{a_0}v_{n-m} - \frac{a_{m-1}}{a_0}v_{n-m+1} - \dots - \frac{a_1}{a_0}v_{n-1}, \end{aligned}$$

и представим эту систему в векторной форме в виде

$$V_n = SV_{n-1}, \quad n = m, (m+1), \dots, \quad (5.7)$$

где

$$V_n = (v_{n-m+1}, v_{n-m+2}, \dots, v_n)^T;$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_m}{a_0} & -\frac{a_{m-1}}{a_0} & -\frac{a_{m-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Начальный вектор $V_{m-1} = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1})^T$ полагаем задан. Множество собственных чисел матрицы S , можно показать, совпадает с множеством корней характеристического уравнения (5.2).

Лемма. Если выполнено условие корней, то существует такая норма $\|\cdot\|_*$ вектора, что для подчинённой нормы матрицы S справедливо неравенство $\|S\|_* \leq 1$.

Доказательство. С помощью преобразования подобия

$$\hat{S} = QSQ^{-1} \quad (5.9)$$

приведем матрицу S к модифицированной жордановой форме

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{S}_l \end{bmatrix},$$

где \mathfrak{S}_k — число, либо жорданова клетка

$$\mathfrak{S}_k = \begin{bmatrix} q_k & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & q_k & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \varepsilon \\ 0 & 0 & \dots & q_k \end{bmatrix},$$

а q_k — собственное число матрицы S ; $\varepsilon > 0$ — любое число. Оценим норму $\|\hat{S}\|_C$

$$\|\hat{S}\|_C = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |\hat{s}_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq m} (|\hat{s}_{ii}| + |\hat{s}_{i,i+1}|).$$

Здесь диагональный элемент ϵ_i совпадает с одним из корней характеристического уравнения, а внедиагональный элемент

$$\widehat{s}_{i,i+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \widehat{s}_{ii} \text{ — простой корень,} \\ \epsilon, & \text{если } \widehat{s}_{ii} \text{ — кратный корень.} \end{cases}$$

Если $\widehat{s}_{i,i+1} = 0$ для некоторого i , то по условию леммы $|\widehat{s}_{ii}| \leq 1$. Если же $\widehat{s}_{i,i+1} = \epsilon$, то \widehat{s}_{ii} — кратный корень и согласно условию корней выполняется строгое неравенство $|\widehat{s}_{ii}| < 1$. Но тогда при достаточно малом ϵ выполнено условие

$$|\widehat{s}_{ii}| + |\widehat{s}_{i,i+1}| < 1.$$

Таким образом, выбирая ϵ достаточно малым, получим $\|\mathfrak{S}\|_C \leq 1$.

Введём норму вектора

$$\|y\|_* = \|Qy\|_C, \quad (5.10)$$

где Q определено согласно (5.9). Учитывая (5.10), получаем

$$\|Sy\|_* = \|QSy\|_C = \|QSQ^{-1} \cdot Qy\|_C,$$

откуда следует доказательство леммы: $\|S\|_* = \|\mathfrak{S}\|_C \leq 1$.

Докажем теперь достаточность выполнения условия корней для устойчивости уравнения (5.1) по начальным данным. Из уравнения (5.7), учитывая лемму, получим

$$\|V_n\|_* \leq \|S\|_* \|V_{n-1}\|_* \leq \|V_{n-1}\|_*,$$

откуда следует

$$\|V_n\|_* \leq \|V_{m-1}\|_*, \quad n = m, (m+1), \dots \quad (5.11)$$

Согласно определению нормы (5.10)

$$\|V\|_* = \|QV\|_C \leq \|Q\|_C \|V\|_C.$$

Учитывая тождество

$$V = Q^{-1}QV,$$

справедливое для любой невырожденной матрицы Q , получаем оценку

$$\|V\|_C \leq \|Q^{-1}\|_C \cdot \|QV\|_C = \|Q^{-1}\|_C \cdot \|V\|_*.$$

Таким образом, выполняются оценки

$$\left(\|Q^{-1}\|_C\right)^{-1} \cdot \|V\|_C \leq \|V\|_* \leq \|Q\|_C \cdot \|V\|_C. \quad (5.12)$$

Из выражений (5.11) и (5.12) получаем оценку

$$\|V_n\|_C \leq M_1 \|V_{m-1}\|_C, \quad (5.13)$$

где $M_1 = \|Q^{-1}\|_C \cdot \|Q\|_C$. Из выражения (5.13) следует неравенство

$$|v_n| \leq M_1 \max_{0 \leq j \leq m-1} |v_j|,$$

означающее устойчивость уравнения (5.1) по начальным данным, что и требовалось доказать.

5.3. Оценка решения неоднородного уравнения

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного разностного уравнения

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m} = h g_{n-m}, \quad (5.14)$$

где начальные данные y_0, y_1, \dots, y_{m-1} и функции g_{n-m} заданы, $n = m, (m+1), \dots$. Если $a_0 \neq 0$, то для каждой правой части g_{n-m} решение задачи Коши существует и единственно. Оно может быть вычислено по формуле

$$y_n = -\frac{a_m}{a_0} y_{n-m} - \frac{a_{m-1}}{a_0} y_{n-m+1} - \dots - \frac{a_1}{a_0} y_n + \frac{h g_{n-m}}{a_0}, \quad n = m, (m+1), \dots,$$

исходя из начальных данных y_0, y_1, \dots, y_{m-1} и известной правой части g_{n-m} .

Докажем *теорему*, что если однородное уравнение (5.1) устойчиво по начальным данным, то для неоднородного уравнения (5.14) справедлива оценка

$$|y_n| \leq M_1 \max_{0 \leq j \leq m-1} |y_j| + M_2 \sum_{k=0}^{n-m} h |g_k|, \quad (5.15)$$

где M_1 и M_2 не зависят от n .

Выполнение оценки (5.15) означает по определению устойчивость уравнения (5.14) по правой части. Следовательно, из устойчивости по начальным данным непосредственно следует устойчивость по правой части.

Представим уравнение (5.14) в векторном виде

$$Y_n = S Y_{n-1} + h G_{n-1}, \quad n = m, (m+1), \quad (5.16)$$

где

$$Y_n = (y_{n-m+1}, y_{n-m+2}, \dots, y_n)^T,$$

$$G_{n-1} = \left(0, 0, \dots, \frac{g_{n-m}}{a_0} \right)^T, \quad (5.17)$$

матрица S определена ранее (5.8).

Если уравнение (5.1) устойчиво по начальным данным, тогда согласно теореме п. 5.2 выполнено условие корней. При этом условии, как показано в п. 5.2, для некоторой нормы матрицы S справедливо неравенство $\|S\|_* \leq 1$. Учитывая это, оценим норму вектора Y_n из уравнения (5.16)

$$\|Y_k\|_* \leq \|Y_{k-1}\|_* + h\|G_{k-1}\|_*, \quad k = m, (m+1), \dots$$

Суммируя эти неравенства по k от m до n , получим

$$\|Y_n\|_* \leq \|Y_{m-1}\|_* + \sum_{k=m-1}^{n-1} h\|G_k\|_*. \quad (5.18)$$

Используя неравенство (5.12)

$$\left(\|Q^{-1}\|_C\right)^{-1} \cdot \|V\|_C \leq \|V\|_* \leq \|Q\|_C \cdot \|V\|_C,$$

устанавливающее эквивалентность норм $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_C$, из (5.18) получаем

$$\left(\|Q^{-1}\|_C\right)^{-1} \|Y_n\|_C \leq \|Q\|_C \left(\|Y_{m-1}\|_C + \sum_{k=m-1}^{n-1} h\|G_k\|_C \right). \quad (5.19)$$

Учитывая вид (5.17) вектора G_k , имеем

$$\|G_k\|_C = \frac{|g_{k+1-m}|}{|a_0|} \Rightarrow \sum_{k=m-1}^{n-1} h\|G_k\|_C = \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=0}^{n-m} h|g_k|.$$

Отсюда и из (5.19) получаем требуемое неравенство

$$\|y_n\|_C \leq M_1 \max_{0 \leq j \leq m-1} |y_j| + M_2 \sum_{k=0}^{n-m} h|g_k|, \quad (5.20)$$

где $M_1 = \|Q^{-1}\|_C \|Q\|_C$; $M_2 = M_1 a_0^{-1}$. Здесь Q — матрица, преобразующая S согласно (5.9) к модифицированной жордановой форме.

5.4. Сходимость m -шагового разностного метода

Согласно определению сходимость метода означает стремление к нулю погрешности численного решения задачи z_n при стремлении к нулю шага интегрирования h . Для определения закона изменения z_n необходимо найти решение уравнения погрешности m -шагового метода (4.7)

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k z_{n-k}}{h} = \psi_{n-m} + \varphi_{n-m}$$

и установить его зависимость от h . Решение уравнения погрешности имеет вид

$$z_n = -\sum_{k=1}^m \frac{a_k z_{n-k}}{a_0} + \frac{h}{a_0} (\psi_{n-m} + \varphi_{n-m}). \quad (5.21)$$

Если бы функция φ_{n-m} равнялась нулю для всех n , то для оценки z_n достаточно было бы воспользоваться оценкой (5.20). Однако наличие зависящей от решения z_n функции φ_{n-m} , характеризующей нелинейность задачи, усложняет получение необходимых оценок.

Теорема. Если для характеристического уравнения m -шагового метода (5.2) выполнено условие корней, функция $f(x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу $|f_u(x, u)| \leq L$ для $x \in (x_0, X]$, разностное уравнение (4.6) аппроксимирует дифференциальное уравнение (4.5), то решение разностной задачи (4.6) для $x \in (x_0, X)$ сходится при $h \rightarrow 0$ к решению задачи (4.5), то есть погрешность решения $z \rightarrow 0$. Причем порядок сходимости определяется порядком аппроксимации уравнения и начальных данных.

Будем полагать, что начальные данные и дифференциальное уравнение аппроксимируются с порядком $O(h^p)$:

$$\max_{0 \leq j \leq m-1} |z_j| = O(h^p); \quad \psi_{n-m} = O(h^p) \text{ для } n = m, (m+1), \dots \quad (5.22)$$

Доказательство. Представим функцию φ_{n-m} , определенную согласно уравнению (4.9), как

$$\begin{aligned} \varphi_{n-m} = & b_0(f(x_n, y_n) - f(x_n, u_n)) + b_1(f(x_{n-1}, y_{n-1}) - f(x_{n-1}, u_{n-1})) + \\ & + \dots + b_m(f(x_{n-m}, y_{n-m}) - f(x_{n-m}, u_{n-m})), \end{aligned}$$

в виде

$$\varphi_{n-m} = b_0 l_n z_n + \sum_{k=1}^m b_k l_{n-k} z_{n-k}. \quad (5.23)$$

Здесь l_{n-k} определена в соответствии с теоремой Лагранжа о среднем:

$$f(x_{n-k}, y_{n-k}) - f(x_{n-k}, u_{n-k}) = l_{n-k} z_{n-k},$$

где $l_{n-k} = f_u(x_{n-k}, \tilde{u}_{n-k})$, $\tilde{u}_{n-k} = y_{n-k} + \theta z_{n-k}$, $0 \leq \theta \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Подставляя (5.23) в уравнение (5.21), получим

$$(a_0 - b_0 l_n h) z_n = \sum_{k=1}^m (-a_k + h b_k l_{n-k}) z_{n-k} + h \psi_{n-m}. \quad (5.24)$$

Потребуем, чтобы h удовлетворяло условию

$$h \leq h_0 = \frac{|a_0|}{2|b_0|L}.$$

Тогда коэффициент при z_n будет больше нуля:

$$|a_0 - hb_0l_n| \geq \frac{|a_0|}{2} > 0, \quad (5.25)$$

и уравнение (5.24) можно разрешить относительно z_n :

$$z_n = \sum_{k=1}^m \frac{-a_k + hb_kl_{n-k}}{a_0 - hb_0l_n} z_{n-k} + h \frac{\psi_{n-m}}{a_0 - hb_0l_n}. \quad (5.26)$$

Добавляя к правой части уравнения (5.26) и вычитая из нее выражение $\sum_{k=1}^m \frac{a_k}{a_0} z_{n-k}$, перепишем (5.26) в виде

$$z_n = -\sum_{k=1}^m \frac{a_k}{a_0} z_{n-k} + h \sum_{k=1}^m v_{nk} z_{n-k} + h \frac{\psi_{n-m}}{a_0 - hb_0l_n}, \quad (5.27)$$

где

$$v_{nk} = \frac{a_0 b_k l_{n-k} - a_k b_0 l_n}{a_0 (a_0 - hb_0 l_n)}. \quad (5.28)$$

Введя векторы Z_n и Ψ_{n-1} :

$$Z_n = (z_{n-m+1}, z_{n-m+2}, \dots, z_n)^T;$$

$$\Psi_{n-1} = \left(0, 0, 0, \dots, \frac{\psi_{n-m}}{a_0 - hb_0 l_n} \right)^T;$$

и матрицы V_{n-1} и S :

$$V_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ v_{nm} & \dots & v_{n1} \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_m}{a_0} & -\frac{a_{m-1}}{a_0} & -\frac{a_{m-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix};$$

представим уравнение (5.27) в векторной форме

$$Z_n = SZ_{n-1} + hV_{n-1}Z_{n-1} + h\Psi_{n-1}. \quad (5.29)$$

Учитывая оценку матрицы S в п. 5.2 $\|S\|_* \leq 1$, для уравнения (5.29) получаем неравенство

$$\|Z_n\|_* \leq \|Z_{n-1}\|_* + h\|V_{n-1}\|_* \cdot \|Z_{n-1}\|_* + h\|\Psi_{n-1}\|_*. \quad (5.30)$$

Оценим величину $\|V_{n-1}\|_*$. Согласно уравнениям (5.25) и (5.28) имеем

$$|v_{nk}| \leq 2 \frac{|a_0| \cdot |b_k| + |a_k| \cdot |b_0|}{|a_0|^2} L, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

поэтому $\|V_{n-1}\|_C = \sum_{k=1}^m |v_{nk}| \leq \nu L$,

где $\nu = \frac{2}{a_0^2} \sum_{k=1}^m (|a_0| \cdot |b_k| + |a_k| \cdot |b_0|)$.

Так как для любого вектора x справедливы неравенства

$$\|V_{n-1}x\|_* = \|QV_{n-1}x\|_C = \|(QV_{n-1}Q^{-1})(Qx)\|_C \leq \|QV_{n-1}Q^{-1}\|_C \cdot \|Qx\|_C \leq M_1 \|V_{n-1}\|_C \cdot \|x\|_*,$$

где $M_1 = \|Q\|_C \cdot \|Q^{-1}\|_C$, то $\|V_{n-1}\|_*$ есть ограниченная величина, не зависящая от n и h :

$$\|V_{n-1}\|_* \leq M_1 \|V_{n-1}\|_C \leq M_1 \nu L.$$

Подставляя эту оценку в (5.30), приходим к неравенству для произвольного значения k :

$$\|Z_k\|_* \leq (1 + hc_1)\|Z_{k-1}\|_* + h\|\Psi_{k-1}\|_*,$$

где $k = m, (m+1), \dots$, $c_1 = M_1 \nu L$.

Установим закономерность изменения $\|Z_k\|_*$ с увеличением k :

$$\|Z_m\|_* \leq (1 + hc_1)\|Z_{m-1}\|_* + h\|\Psi_{m-1}\|_*;$$

$$\|Z_{m+1}\|_* \leq (1 + hc_1)\|Z_m\|_* + h\|\Psi_m\|_* \leq (1 + hc_1)^2\|Z_{m-1}\|_* + h(1 + hc_1)\|\Psi_{m-1}\|_* + h\|\Psi_m\|_*.$$

Продолжая этот процесс далее, получим для $k = n$ следующее выражение в компактной форме:

$$\|Z_n\|_* \leq (1 + hc_1)^{n-m+1}\|Z_{m-1}\|_* + \sum_{k=m}^n h(1 + hc_1)^{n-k}\|\Psi_{k-1}\|_*. \quad (5.31)$$

Упростим эту оценку, несколько закругив ее. При $x_0 \leq x_k \leq x_n \leq X$ имеем $(n-k)h \leq X$, поэтому

$$(1 + hc_1)^{n-k} \leq \exp(hc_1(n-k)) \leq \exp(c_1X).$$

Здесь $\exp(c_1 X)$ — ограниченная функция. Теперь из выражения (5.31) получаем

$$\|Z_n\|_* \leq \exp(c_1 X) \cdot \left(h \sum_{k=m}^n \|\Psi_{k-1}\|_* + \|Z_{m-1}\|_* \right). \quad (5.32)$$

Далее, учитывая уравнения (5.12) и (5.25), запишем неравенства, позволяющие перейти от нормы $\|\cdot\|_*$ к норме $\|\cdot\|_C$:

$$\|Z_n\|_* \geq (\|Q^{-1}\|_C)^{-1} \cdot \|Z_n\|_C \geq (\|Q^{-1}\|_C)^{-1} \cdot |z_n|;$$

$$\|Z_{m-1}\|_* \leq \|Q\|_C \cdot \|Z_{m-1}\|_C = \|Q\|_C \cdot \max_{0 \leq j \leq m-1} |z_j|;$$

$$\|\Psi_{k-1}\|_* \leq \|Q\|_C \|\Psi_{k-1}\|_C = \frac{\|Q\|_C}{|a_0 - hb_0 l_n|} |\psi_{k-m}| \leq \frac{2\|Q\|_C}{|a_0|} |\psi_{k-m}|.$$

Подставляя эти неравенства в (5.32) и обозначая $M_1 = \|Q\|_C \|Q^{-1}\|_C$, $M_2 = 2M_1/|a_0|$, устанавливаем оценку погрешности решения z_n :

$$|z_n| \leq \exp(c_1 X) \left(M_1 \max_{0 \leq j \leq m-1} |z_j| + M_2 \sum_{k=0}^{n-m} h |\psi_k| \right). \quad (5.33)$$

Откуда, используя оценку погрешностей аппроксимации начальных данных и разностного метода (5.22) и учитывая ограниченность функции $\exp(c_1 X)$, получаем окончательную оценку погрешности m -шагового метода

$$|z_n| = O(h^p),$$

означающую сходимость метода с порядком $O(h^p)$, равным порядку аппроксимации начальных данных и разностного уравнения. Теорема доказана.

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Условно и абсолютно устойчивые разностные методы

Рассмотрим решение задачи Коши

$$\frac{du}{dx} = f(x, u), \quad x > x_0, \quad u(x_0) = u_0 \quad (6.1)$$

посредством m -шаговых разностных методов

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{h} y_{n-k} = \sum_{k=0}^m b_k f(x_{n-k}, y_{n-k}), \quad n = m, (m+1), \dots \quad (6.2)$$

Как было установлено ранее, устойчивость и сходимость метода определяются выполнением условия корней, то есть расположением корней характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^m a_k q^{m-k} = 0 \quad (6.3)$$

внутри круга единичного радиуса комплексной плоскости $|q| \leq 1$, причем на границе единичного круга не должно быть кратных корней.

Эти условия не учитывают многих особенностей и свойств решений дифференциальной задачи (6.1) и используемого разностного уравнения (6.2). Они означают лишь ограниченность решений однородного разностного уравнения при $n \rightarrow \infty$ и обеспечивают, как показано, также ограниченность неоднородного разностного уравнения и сходимость m -шагового метода. Однако при таком подходе коэффициенты b_k $k = 0, 1, \dots, m$ и, вообще, правая часть уравнения (6.2), не оказывают никакого влияния на устойчивость и сходимость численного решения.

Если же заранее известна некоторая характерная особенность в поведении решения исходного дифференциального уравнения, то желательно, чтобы она сохранялась и у разностного решения. Такое требование сужает множество допустимых разностных методов.

Определим методы, пригодные для расчета асимптотически устойчивых решений уравнения (6.1). Анализ проведем на задаче Коши для модельного уравнения с $\lambda = \text{const}$:

$$\frac{du}{dx} = -\lambda u, \quad x > x_0, \quad u(x_0) = u_0. \quad (6.4)$$

Для $\lambda > 0$ это уравнение имеет монотонно убывающее при $x \rightarrow \infty$ решение $u(x) = u_0 e^{-\lambda(x-x_0)}$. Для любых $h > 0$ решение уравнения (6.4) удовлетворяет неравенству

$$|u(x+h)| \leq |u(x)|, \quad (6.5)$$

что означает устойчивость решения.

Потребуем и для разностного решения задачи выполнения аналогичного неравенства. Рассмотрим метод Эйлера для задачи (6.4)

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = -\lambda y_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.6)$$

откуда получаем

$$y_{n+1} = q y_n, \quad \text{где } q = 1 - h\lambda.$$

Для получения оценки вида (6.5) для уравнения (6.6)

$$|y_{n+1}| \leq |y_n|, \quad n = 1, 2, \dots$$

необходимо, чтобы выполнялось условие $|q| \leq 1$, то есть $|1 - h\lambda| \leq 1$. Откуда вытекает ограничение на шаг интегрирования h :

$$0 < h \leq \frac{2}{|\lambda|}. \quad (6.7)$$

Следовательно, метод (6.6) устойчив, если шаг h удовлетворяет условию (6.7).

Разностный метод (6.2) называется абсолютно устойчивым, если он устойчив при любых $h > 0$, и условно устойчивым, если он устойчив при некоторых ограничениях на шаг h .

Таким образом, метод Эйлера (6.6) условно устойчив при условии (6.7). Рассматривая применение неявного метода Эйлера для уравнения (6.4) с $\lambda > 0$, обнаруживаем, что он является абсолютно устойчивым:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = -\lambda y_{n+1};$$

$$y_{n+1} = qy_n, \quad \text{где } q = 1/(1 + h\lambda);$$

так как условие

$$|q| = 1/(1 + h\lambda) < 1$$

для него выполняется при любых $h > 0$. Следовательно, численное решение, полученное с его помощью оказывается асимптотически устойчивым при любых $h > 0$.

Несмотря на частный характер рассмотренной задачи, полученные результаты отражают характерные свойства и для более общих асимптотически устойчивых систем дифференциальных уравнений: явные разностные методы являются условно устойчивыми, а среди неявных методов существуют абсолютно устойчивые.

Условная устойчивость является существенным недостатком явного метода, так как вынуждает брать слишком маленький шаг интегрирования h . Неявный метод не накладывает такого ограничения на шаг h , однако применение его приводит к необходимости решения на каждом шаге системы алгебраических уравнений, часто нелинейной.

6.2. Понятие жесткой системы дифференциальных уравнений

Большинство рассмотренных ранее численных методов решения одного обыкновенного дифференциального уравнения может применяться и для решения систем дифференциальных уравнений. Однако в случае систем

уравнений, описывающих процессы, протекающие с различной скоростью, могут возникнуть существенные трудности при решении.

Покажем это на примере решения задачи Коши для двух независимых уравнений:

$$\frac{du_1}{dx} = -a_1 u_1; \quad \frac{du_2}{dx} = -a_2 u_2; \quad (6.8)$$

$$x > x_0, \quad u_1(x_0) = u_1^0, \quad u_2(x_0) = u_2^0,$$

где постоянные a_1 и $a_2 > 0$.

Система (6.8) имеет монотонно убывающее с увеличением x решение

$$u(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(x_0)e^{-a_1(x-x_0)} \\ u_2(x_0)e^{-a_2(x-x_0)} \end{bmatrix}.$$

Пусть $a_2 \gg a_1$. Тогда составляющая $u_2(x)$ затухает гораздо быстрее, чем составляющая $u_1(x)$, и, начиная с некоторого x , решение системы $u(x) = [u_1(x), u_2(x)]^T$ практически полностью определяется лишь медленно убывающей составляющей $u_1(x)$. Тем не менее, при решении системы (6.8) явным разностным методом шаг интегрирования h определяется компонентой $u_2(x)$, не существенной с точки зрения поведения решения системы, что приводит к большим затратам машинного времени.

Поясним это на примере решения системы (6.8) методом Эйлера:

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h} + a_1 u_1^n = 0; \quad \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h} + a_2 u_2^n = 0; \quad (6.9)$$

где $u_i^n = u_i(x_n)$, $i = 1, 2$. Этот метод будет устойчив при одновременном выполнении двух условий: $ha_1 \leq 2$ и $ha_2 \leq 2$. Так как $a_2 \gg a_1 > 0$, условие устойчивости приводит к довольно жесткому ограничению на шаг интегрирования системы $h \leq 2/a_2$.

Этот пример является искусственным, так как каждое уравнение можно решать независимо. Однако подобные трудности возникают и при решении любой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dx} = Au, \quad (6.10)$$

если матрица A имеет большой разброс собственных значений λ_k .

Если матрицу A преобразованием подобия можно привести к диагональному виду $B = Q^{-1}AQ$, то введением новой переменной $u = Qv$ преобразуем систему (6.10) в систему независимых уравнений с диагональной матрицей B , имеющей одинаковые с матрицей A собственные числа λ_k :

$$\frac{dv}{dx} = Bv.$$

Определение. Асимптотически устойчивая система дифференциальных уравнений (6.10) с постоянной матрицей $A(m \times m)$ называется жесткой, если выполняются следующие условия:

- 1) $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$ (здесь $\operatorname{Re} \lambda_k$ — действительная часть собственного значения λ_k);
- 2) велико отношение

$$S = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k|}.$$

Число S называется числом жесткости системы (6.10). Однако величина S , начиная с которой система становится жесткой, не указывается, она определяется конкретной физической постановкой задачи.

Если матрица A зависит от x , то ее собственные числа являются функциями x — $\lambda_k = \lambda_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, m$. При каждом x можно определить число жесткости

$$S(x) = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k(x)|}{\min_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k(x)|},$$

которое также зависит от x . В этом случае система уравнений

$$\frac{du}{dx} = A(x)u$$

с матрицей, зависящей от x , $A(x)$, называется жесткой на интервале $(x_0, X]$, если $\operatorname{Re} \lambda_k(x) < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, для всех $x \in (x_0, X)$ и число $\sup S(x)$ велико.

Таким образом, решение жесткой системы содержит как быстро, так и медленно убывающие составляющие. Начиная с некоторого $x > x_0$, решение системы почти полностью определяется медленно убывающей составляющей. Однако в случае явных схем быстро убывающая составляющая накладывает жесткие ограничения на условия устойчивости, что вынуждает брать шаг интегрирования слишком мелким.

Для выхода из этой ситуации было рекомендовано для решения жестких систем уравнений применять неявные разностные методы, обладающие существенно большей устойчивостью, чем явные методы. Например, решая систему (6.9) с помощью неявного абсолютно устойчивого метода Эйлера:

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h} = -a_1 u_1^{n+1};$$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h} = -a_2 u_2^{n+1},$$

шаг интегрирования h можно выбирать, руководствуясь лишь соображением точности, а не устойчивости.

6.3. Понятие жесткости для нелинейной системы дифференциальных уравнений

Если для линейной системы дифференциальных уравнений число жесткости S можно определить заранее, до решения задачи, вычислив максимальное и минимальное собственные значения матрицы системы, то для нелинейной системы это совсем не так. Конечно, критерий оценки жесткости системы, это наличие существенно разномасштабных процессов, описываемых системой, остается. Однако определить скорости протекания различных процессов, описываемых нелинейной системой, до решения задачи часто оказывается невозможно.

Поэтому нелинейную систему приходится линеаризировать, а затем уже для линеаризованной системы определять число жесткости и экстраполировать его на нелинейную систему при принятых допущениях. Рассмотрим один из способов такой оценки жесткости нелинейной системы.

Пусть задана задача Коши для нелинейной системы

$$\frac{du}{dx} = f(x, u), \quad x > x_0, \quad u(x_0) = u^0, \quad (6.11)$$

где

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x))^T;$$

$$f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u), \dots, f_m(x, u))^T.$$

Пусть каким-то образом получено некоторое решение $\mathcal{U}(x)$ системы (6.11). Определим разность $z(x) = u(x) - \mathcal{U}(x)$ между произвольным решением $u(x)$ системы (6.11) и данным решением $\mathcal{U}(x)$. Эта разность удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{dz_k}{dx} = \frac{du_k}{dx} - \frac{d\mathcal{U}_k}{dx} = f_k(x, \mathcal{U}(x) + z(x)) - f_k(x, \mathcal{U}(x)), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (6.12)$$

Рассматривая $z(x)$ как малое возмущение, внесенное в основное решение $\mathcal{U}(x)$, разложим функцию $f_k(x, \mathcal{U} + z)$ в уравнении (6.12) в ряд Тейлора. Так как

$$f_k(x, u) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_m),$$

имеем

$$f_k(x, \nu + z) = f_k(x, \nu) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k(x, \nu)}{\partial \nu_j} z_j(x) + O(|z|),$$

где член $O(|z|)$ обозначает величины более высокого порядка малости по сравнению с z . Подставляя это разложение в (6.12), получим

$$\frac{dz}{dx} = A(x, \nu(x))z(x) + O(|z|), \quad (6.13)$$

где $A(x, \nu(x)) = \frac{\partial f(x, \nu(x))}{\partial \nu}$ — матрица Якоби с элементами

$$a_{ij}(x, \nu(x)) = \frac{\partial f_i(x, \nu(x))}{\partial \nu_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Отбрасывая в выражении (6.13) члены порядка $O(|z|)$, получим систему уравнений первого приближения для функции $w(x) \approx u(x) - \nu(x)$:

$$\frac{dw(x)}{dx} = A(x, \nu(x))w(x). \quad (6.14)$$

Система (6.14) является линейной системой дифференциальных уравнений относительно $w(x)$ при заданной функции $\nu(x)$, и к ней уже можно применить изложенные выше способы оценки жесткости.

Определение. Пусть $\lambda_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, m$ — собственные числа матрицы $A(x, \nu(x))$. Число жесткости определяется как

$$S(x) = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k(x)|}{\min_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k(x)|}.$$

Система (6.11) называется жесткой на решении $\nu(x)$ и на данном интервале $x_0 < x < X$, если:

- 1) $\operatorname{Re} \lambda_k(x) < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$ для всех $x \in (x_0, X)$;
- 2) число $\sup S(x)$ велико.

6.4. Специальные определения устойчивости

Сравнение различных разностных методов, разрабатываемых для расчетов жестких систем уравнений, обычно проводится на решении задачи Коши для модельного уравнения

$$\frac{du}{dx} = \lambda u, \quad (6.15)$$

где λ — произвольное комплексное число. Для обеспечения моделирования уравнением (6.15) задачи (6.10) расчеты проводятся при различных λ , соответствующих собственным числам матрицы A .

Разностный m -шаговый метод (6.2) для уравнения (6.15) имеет вид

$$\sum_{k=0}^m (a_k - b_k \mu) y_{n-k} = 0, \quad n = m, (m+1), \dots, \quad (6.16)$$

где $\mu = h\lambda$ — в общем случае комплексный параметр.

Отыскивая решения уравнения (6.16) в виде $y_n = q^n$, получаем для q характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) q^{m-k} = 0, \quad (6.17)$$

отличающееся от (6.3) тем, что его коэффициенты зависят от параметра $\mu = h\lambda$. При больших μ корни уравнений (6.3) и (6.17) будут значительно отличаться, что вынудило дополнительно к требованию выполнения условия корней характеристического уравнения (6.3) ввести некоторые новые понятия относительно устойчивости метода.

Областью устойчивости разностного метода (6.2) называется множество точек комплексной плоскости $\mu = h\lambda$, для которых данный метод при решении уравнения (6.15) является устойчивым.

Определим области устойчивости некоторых рассмотренных ранее методов. Первым рассмотрим явный метод Эйлера

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

Для уравнения (6.15) метод Эйлера имеет вид

$$y_{n+1} = (1 + \mu) y_n, \quad \mu = h\lambda.$$

Он устойчив при условии $|1 + \mu| \leq 1$, что для комплексного числа $\mu = \mu_0 + i\mu_1$ означает выполнение неравенства $(\mu_0 + 1)^2 + \mu_1^2 \leq 1$. Следовательно, область устойчивости данного метода представляет собой круг единичного радиуса с центром в точке $(-1, 0)$.

Неявный метод Эйлера

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

для уравнения (6.15) имеет вид

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - \mu} y_n, \quad \mu = h\mu.$$

Условием его устойчивости будет выполнение неравенства $|1/(1-\mu)| \leq 1$, откуда для комплексного числа μ получаем

$$\frac{1}{(1-\mu_0)^2 + \mu_1^2} \leq 1.$$

Отсюда следует, что областью устойчивости неявного метода Эйлера является внешность круга единичного радиуса с центром в точке $(1, 0)$.

Кроме обычного определения устойчивости разностного метода (все корни характеристического уравнения (6.17) не превосходят по модулю единицу), в случае жестких систем используют и другие, более узкие определения устойчивости: A -устойчивый метод, $A(\alpha)$ -устойчивый метод и др.

Разностный метод называется A -устойчивым, если область его устойчивости содержит левую полуплоскость $\operatorname{Re} \mu < 0$. Для асимптотически устойчивых систем уравнений (все $\operatorname{Re} \lambda < 0$), это означает, что A -устойчивый метод является абсолютно устойчивым, если устойчиво решение исходного дифференциального уравнения. Отсюда следует, что явный метод Эйлера не является A -устойчивым, а неявный метод — A -устойчив.

Применение симметричной схемы второго порядка точности

$$\frac{y_{n+1} + y_n}{h} = 0,5(f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)) \quad (6.18)$$

для уравнения (6.15) дает следующий алгоритм:

$$y_{n+1} = qy_n, \quad q = \frac{1 + 0,5\mu}{1 - 0,5\mu}.$$

Условие устойчивости этого метода $q \leq 1$, то есть

$$\frac{(1 + 0,5\mu_0)^2 + (0,5\mu_1)^2}{(1 - 0,5\mu_0)^2 + (0,5\mu_1)^2} \leq 1.$$

Отсюда видно, что для асимптотически устойчивых уравнений (при $\operatorname{Re} \mu < 0$) область устойчивости метода (6.18) включает всю левую полуплоскость $\operatorname{Re} \mu < 0$. Следовательно, метод (6.18) является A -устойчивым.

Для решения жестких систем уравнений было бы целесообразно использовать A -устойчивые разностные методы, так как их условия устойчивости не накладывают ограничений на шаг h . К сожалению, класс A -устойчивых методов весьма узок.

Проведенными исследованиями показано [15], что наивысший порядок неявных A -устойчивых многошаговых методов равен двум, например, рассмотренная выше симметричная схема (6.18). Среди явных многошаговых методов нет A -устойчивых.

Определитель этой системы не равен нулю, следовательно, она имеет единственное решение. Из системы (6.22) видно, что наивысший порядок аппроксимации методов Гира равен m .

Разрешая систему (6.22) при различных m , получаем методы Гира соответствующего порядка аппроксимации.

При $m = 1$ получаем неявный метод первого порядка, эквивалентный методу Эйлера,

$$y_n - y_{n-1} = hf(x_n, y_n).$$

При $m = 2$, $m = 3$ и $m = 4$ получаем методы:

$$\frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2} = hf(x_n, y_n); \quad (6.23)$$

$$\frac{11y_n - 18y_{n-1} + 9y_{n-2} - 2y_{n-3}}{6} = hf(x_n, y_n); \quad (6.24)$$

$$\frac{25y_n - 48y_{n-1} + 36y_{n-2} - 16y_{n-3} + 3y_{n-4}}{12} = hf(x_n, y_n), \quad (6.25)$$

имеющие, соответственно, второй, третий и четвертый порядки точности.

Неявные методы Гира обладают хорошими свойствами устойчивости, что позволяет использовать их для решения жестких систем уравнений. На практике при решении жестких систем используются неявные методы до десятого порядка точности.

Определим область устойчивости метода второго порядка (6.23). Для этого применим метод (6.23) к модельному уравнению (6.15)

$$\frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2} = \mu y_n, \quad (6.26)$$

имеющему характеристическое уравнение

$$(3 - 2\mu)q^2 - 4q + 1 = 0. \quad (6.27)$$

Здесь $\mu = h\lambda$ — комплексный параметр.

Требуется найти множество точек G комплексной плоскости $\mu = \mu_0 + i\mu_1$, для которых оба корня $q_{1,2}(\mu)$ уравнения (6.27) не превосходят по модулю единицу. Границей Γ этой области является множество точек μ , для которых $|q| = 1$.

Разрешим уравнение (6.27) относительно параметра μ :

$$\mu = (3 - 4q^{-1} + q^{-2})/2.$$

При условии $|q| = 1$, то есть при $q = e^{-i\varphi}$ ($e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$; $q^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$), это уравнение принимает вид

$$\mu = (3 - 4e^{i\varphi} + e^{2i\varphi})/2. \quad (6.28)$$

График этой кривой приведен на рис. 4. При изменении φ от 0 до 2π точка μ описывает замкнутую, симметричную относительно действительной оси, кривую Γ , отделяющую точки $\mu(q)$ снаружи этой кривой, для которых выполнено условие $|q| < 1$, то есть область устойчивости, от области неустойчивости, расположенной внутри кривой Γ . Обозначая $x = \cos \varphi$, уравнение (6.28) можно переписать в виде

$$\mu = (1 - x)^2 \pm i\sqrt{1 - x^2}(2 - x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

откуда видно, что кривая Γ расположена целиком в правой полуплоскости μ . Так как область устойчивости G метода (6.23) содержит всю левую полу-

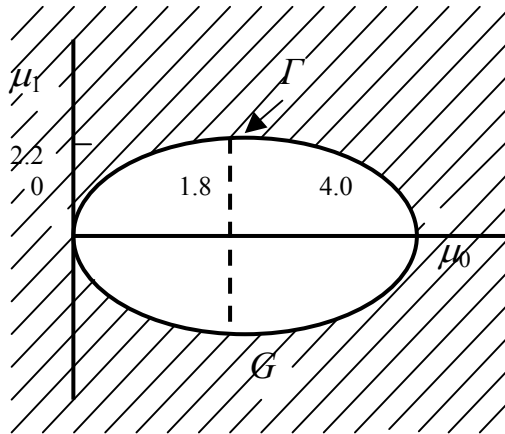


Рис. 4. Граница устойчивости метода (6.23)

плоскость μ , метод (6.23) является A -устойчивым.

Аналогично определяется область устойчивости метода четвертого порядка (6.25). Для этого его характеристическое уравнение записываем в виде

$$\mu = -\frac{1}{12}(25 - 48q^{-1} + 36q^{-2} - 16q^{-3} + 3q^{-4})$$

и, полагая $q = e^{-i\varphi}$ и $x = \cos \varphi$, находим уравнение границы Γ , разделяющей области устойчивости и неустойчивости:

$$\mu = -\frac{2}{3}(1 - x)^3(3x + 1) \pm i\frac{\sqrt{1 - x^2}}{3}(6x^3 - 16x^2 + 15x - 8). \quad (6.29)$$

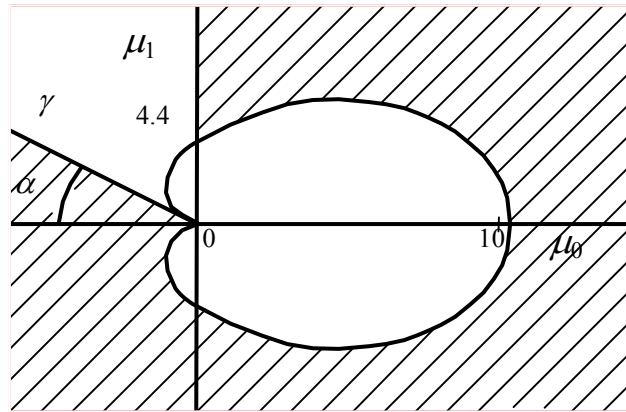


Рис. 5. Граница устойчивости метода (6.25)

График полученной границы Γ приведен на рис. 5. Как видно из рисунка, в отличие от предыдущего примера, уравнение (6.29) имеет точки границы, расположенные в левой полуплоскости. Поэтому метод (6.25) не является A -устойчивым. В данном случае область устойчивости метода содержит угол α , который образует касательная γ к границе Γ , проходящая через точку $(0, 0)$, с отрицательным направлением оси μ_0 . Следовательно, метод (6.25) $A(\alpha)$ -устойчив. Проведенные оценки показали, что метод (6.25) $A(\alpha)$ -устойчив при $\alpha \approx 68^\circ$.

Для решения неявных уравнений метода Гира

$$a_0 y_n - h f(x_n, y_n) = - \sum_{k=1}^m a_k y_{n-k}$$

обычно используется какой-либо итерационный метод, например, метод простой итерации

$$y_n^{(s+1)} = \frac{h}{a_0} f(x_n, y_n^{(s)}) - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^m a_k y_{n-k}^{(s)}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (6.30)$$

Итерации продолжают до выполнения условия

$$\|y_n^{(s+1)} - y_n^{(s)}\| \leq \varepsilon > 0,$$

где ε — малая величина. В качестве начального приближения $y^{(0)}$ можно взять решение, полученное с помощью явного метода Адамса, например, третьего порядка точности

$$\frac{y_0 - y_{n-1}}{h} = \frac{1}{12} (23f(x_{n-1}, y_{n-1}) - 16f(x_{n-2}, y_{n-2}) + 5f(x_{n-3}, y_{n-3})).$$

Определим условия сходимости процесса итераций. Для этого представим уравнение (6.30) в виде

$$y_n^{(s+1)} = \frac{h}{a_0} f(x_n, y_n^{(s)}) + F.$$

Затем, вычитая из него значение $y_n^{(s)}$ с предыдущей итерации и используя теорему Лагранжа о среднем, находим

$$y_n^{(s+1)} - y_n^{(s)} = \frac{h}{a_0} (f(x_n, y_n^{(s)}) - f(x_n, y_n^{(s-1)})) = \frac{h}{a_0} (y_n^{(s)} - y_n^{(s-1)}) \left(\frac{\partial f(x_n, \xi)}{\partial y} \right),$$

$$\xi \in [y_n^{(s)}, y_n^{(s-1)}].$$

Отсюда, полагая $|\partial f / \partial y| \leq M$ ($|\partial f / \partial u| \leq M$), получаем неравенство

$$|y_n^{(s+1)} - y_n^{(s)}| \leq \frac{hM}{a_0} |y_n^{(s)} - y_n^{(s-1)}|,$$

определяющее условие сходимости итераций: $hM/a_0 < 1$, которое выполняется при достаточно малом h . Если ограничиться одной итерацией, то получаем метод предиктор-корректор.

6.6. Неявные методы Рунге–Кутты

Важным классом методов решения жестких систем уравнений являются неявные одношаговые методы Рунге–Кутты, имеющие следующий вид:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \sum_{i=1}^m \sigma_i k_i; \quad (6.31)$$

$$k_1 = f(x_n + a_1 h, y_n + b_{11} h k_1 + b_{12} h k_2 + \dots + b_{1m} h k_m);$$

$$k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h k_1 + b_{22} h k_2 + \dots + b_{2m} h k_m);$$

.....

$$k_m = f(x_n + a_m h, y_n + b_{m1} h k_1 + b_{m2} h k_2 + \dots + b_{mm} h k_m).$$

Значения коэффициентов a_i , b_{ij} , σ_i ($i, j = 1, 2, \dots, m$) вычисляются после разложения функций y_{n+1} , k_i в ряд Тейлора и сведения невязки метода к минимуму путем приравнивания членов при степенях $h^{(p-1)}$ к нулю, где p — порядок аппроксимации схемы.

Таким образом, получаются:

неявная схема Рунге–Кутты третьего порядка $O(h^3)$:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2} (k_1 + k_2); \quad (6.32)$$

$$k_1 = f\left(x_n + \frac{3 + \sqrt{3}}{6}h, y_n + \frac{3 + \sqrt{3}}{6}hk_1\right);$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6}h, y_n - \frac{\sqrt{3}}{3}hk_1 + \frac{3 + \sqrt{3}}{6}hk_2\right);$$

явные схемы Рунге–Кутты второго порядка $O(h^2)$:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2); \quad (6.33)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

и

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = k_2; \quad (6.34)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n); \quad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right).$$

Батчер показал, что для каждого m существует единственная формула Рунге–Кутты порядка точности $2m$, причем коэффициенты этой формулы удовлетворяют следующим условиям:

1) коэффициенты $a_i = \sum_{j=1}^m b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$ являются корнями многочлена

Лежандра степени m :

$$L_m(2a-1) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \frac{d^m (x^2 - 1)^m}{dx^m} \Big|_{x=2a-1};$$

2) коэффициенты σ_i удовлетворяют уравнениям:

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i a_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, m; \quad (6.35)$$

3) коэффициенты b_{ij} удовлетворяют уравнениям:

$$\sum_{j=1}^m b_{ij} a_j^{k-1} = \frac{1}{k} a_i^k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (6.36)$$

Эти формулы Рунге–Кутты порядка $2m$ называются формулами оптимального порядка.

Получим некоторые неявные формулы Рунге–Кутты оптимального порядка для $m = 1, 2, 3$.

Многочлен Лежандра первой степени для $m = 1$ имеет вид

$$L_1(x) = x,$$

$$L_1(2a - 1) = 2a - 1.$$

Откуда корень $a = 1/2$. Коэффициент σ_1 определяется из уравнения (6.35) явно — $\sigma = 1$, а b_1 из уравнения (6.36) — $b_1 = 1/2$. В результате получаем одночленную формулу второго порядка $O(h^2)$:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = k, \quad (6.37)$$

$$k = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k\right).$$

Эта формула называется неявной формулой средних прямоугольников.

Для $m = 2$ полином Лежандра второй степени имеет вид

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

откуда
$$L_2(2a - 1) = \frac{1}{2}(3(2a - 1)^2 - 1),$$

и корни
$$a_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6; \quad a_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6.$$

Коэффициенты σ_1 и σ_2 определяются из уравнений (6.36):

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1;$$

$$\sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 = 1/2,$$

решение которых дает следующие значения:

$$\sigma_1 = \frac{1/2 - a_2}{a_1 - a_2} = 1/2; \quad \sigma_2 = 1/2.$$

Коэффициенты b_{11} и b_{12} определяются из уравнения (6.36) при $i = 1$:

$$b_{11} + b_{12} = a_1;$$

$$b_{11} a_1 + b_{12} a_2 = \frac{1}{2} a_1^2; \quad \Rightarrow \quad b_{11} = \frac{1}{4}, \quad b_{12} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Коэффициенты b_{21} и b_{22} определяются из уравнений (6.36) при $i = 2$:

$$b_{21} + b_{22} = a_2;$$

$$b_{21}a_1 + b_{22}a_2 = \frac{1}{2}a_2^2; \quad \Rightarrow \quad b_{21} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad b_{22} = \frac{1}{4}.$$

Наконец, получаем двучленную формулу Рунге–Кутты 4-го порядка:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2); \quad (6.38)$$

$$k_1 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \frac{1}{4}hk_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_2\right);$$

$$k_2 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_1 + \frac{1}{4}hk_2\right).$$

Для $m = 3$ многочлен Лежандра третьей степени имеет вид

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

и

$$L_3(2a - 1) = \frac{1}{2}(5(2a - 1)^3 - 3(2a - 1)).$$

Отсюда корни многочлена: $a_1 = 1/2 - \sqrt{15}/10$; $a_2 = 1/2$; $a_3 = 1/2 + \sqrt{15}/10$.

Коэффициенты σ_i находятся из системы уравнений (6.35):

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1;$$

$$\sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3 = 1/2 ;$$

$$\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 = 1/3,$$

а коэффициенты b_{ij} , $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$, определяются из системы (6.36) при $i = 1, 2, 3$. Например, b_{11}, b_{12}, b_{13} при $i = 1$ находятся из уравнений:

$$b_{11} + b_{12} + b_{13} = a_1;$$

$$b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + b_{13}a_3 = \frac{1}{2}a_1^2;$$

$$b_{11}a_1^2 + b_{12}a_2^2 + b_{13}a_3^2 = \frac{1}{3}a_1^3.$$

В результате получаем следующую формулу шестого порядка:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{5k_1 + 8k_2 + 5k_3}{18}, \quad (6.39)$$

$$k_1 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h, y_n + \frac{5}{36}hk_1 + \left(\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}\right)hk_2 + \left(\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}\right)hk_3\right);$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \left(\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}\right)hk_1 + \frac{2}{9}hk_2 + \left(\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}\right)hk_3\right);$$

$$k_3 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h, y_n + \left(\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}\right)hk_1 + \left(\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}\right)hk_2 + \frac{5}{36}hk_3\right).$$

6.7. О решении неявных разностных уравнений

Выше для решения неявных разностных уравнений рассматривалось применение метода простой итерации, необходимым условием сходимости которого является выполнение неравенств:

$$\frac{hM}{a_0} < 1 \quad \text{или} \quad \frac{hL}{a_0} < 1, \quad (6.40)$$

где h — шаг интегрирования; $M = \max |f_u(x, u)|$; L — константа Липшица. Однако для жёстких систем уравнений выполняется условие $\max |\operatorname{Re} \lambda_k| \gg 1$. Следовательно, в силу соотношения $\max |\operatorname{Re} \lambda_k| \leq L$ константа Липшица и величина M для таких систем велики: M и $L \gg 1$.

В результате условие сходимости метода простой итерации (6.40) приводит к сильному ограничению на шаг интегрирования и не даёт выигрыша при применении неявных схем вместо явных. Поэтому при интегрировании жёстких систем необходимо отказаться от использования метода простой итерации.

6.7.1. Решение неявных уравнений Гира

Применим для решения неявных m -шаговых уравнений, в частности методов Гира, метод Ньютона. Запишем разностные уравнения в следующем виде:

$$y_n - \frac{h}{a_0} f(x_n, y_n) + \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^m a_k y_{n-k} = 0, \quad (6.41)$$

будем считать $y_n = y(x_n)$ и $f(x_n, y_n)$ вектор-функциями. Итерационный процесс Ньютона для уравнений (6.41) будет выглядеть следующим образом:

$$y_n^{(s+1)} = y_n^{(s)} - \left(E - \frac{h}{a_0} \frac{\partial f(x_n, y_n^{(s)})}{\partial y} \right)^{-1} \times \\ \times \left(y_n^{(s)} + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{a_0} y_{n-k} - \frac{h}{a_0} f(x_n, y_n^{(s)}) \right), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (6.42)$$

Здесь s — номер итерации; $\frac{\partial f(x_n, y_n^{(s)})}{\partial y}$ — матрица Якоби, элементы которой равны

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x_n, y_n^{(s)})}{\partial (y_n^{(s)})_j}.$$

Для решения уравнений (6.42) надо вычислить обратную матрицу G^{-1} для матрицы G :

$$G = E - \frac{h}{a_0} \frac{\partial f(x_n, y_n^{(s)})}{\partial y},$$

а потом определить последующее приближение вектора $y_n^{(s+1)}$ по формуле (6.42):

$$y_n^{(s+1)} = y_n^{(s)} - G^{-1} \left[y_n^{(s)} + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{a_0} y_{n-k} - \frac{h}{a_0} f(x_n, y_n^{(s)}) \right].$$

Кроме того, решение можно получить непосредственно из линейной системы уравнений

$$G(y_n^{(s+1)} - y_n^{(s)}) = -y_n^{(s)} - \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{a_0} y_{n-k} + \frac{h}{a_0} f(x_n, y_n^{(s)}), \quad (6.43)$$

путем LU -разложения матрицы G , где L — нижняя треугольная матрица; U — верхняя треугольная матрица, последовательно решая две линейные системы: сначала с нижней треугольной матрицей L :

$$Lw = -y_n^{(s)} - \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{a_0} y_{n-k} - \frac{h}{a_0} f(x_n, y_n^{(s)}),$$

а затем с верхней U :

$$Uv = w.$$

После этого решение находится по формуле

$$y_n^{(s+1)} = y_n^{(s)} + v.$$

На каждой итерации требуется вычислить матрицу Якоби G , найти её обратную G^{-1} либо решить линейную систему уравнений (6.43). Часто для решения системы (6.41) применяют модифицированный метод Ньютона, когда вычисление матрицы G , её обращение или её LU -разложение производятся только один раз и все итерации для $s = 1, 2, \dots$ выполняются с одной и той же матрицей G^{-1} или с одними и теми же матрицами L и U . Если матрица Якоби мало изменяется от точки (x_n, y_n) к точке (x_{n+1}, y_{n+1}) , то одна и та же матрица G^{-1} (или L и U) может быть использована для вычисления y_n в нескольких точках x_{n+1}, x_{n+2}, \dots

Если же для нахождения решения в некоторой точке x_{n+k} сходимость не достигается за максимально допустимое число итераций, то вновь вычисляется матрица Якоби и находится её обратная матрица G^{-1} или снова производится её LU -разложение.

6.7.2. Решение неявных уравнений Рунге–Кутта

Для простоты рассмотрим способ решения неявных уравнений Рунге–Кутта на примере системы двух уравнений первого порядка. В случае решения систем с большим числом уравнений процесс решения остается прежним, только возрастают трудности вычисления матрицы Якоби системы и ее обращения.

Пусть требуется решить систему уравнений первого порядка:

$$y' = f(x, y, z);$$

$$z' = \varphi(x, y, z),$$

$$\text{при } x > x_0; \quad y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = z_0. \quad (6.44)$$

Формула Рунге–Кутта четвертого порядка для системы (6.44) записывается в таком виде:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2);$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2); \quad (6.45)$$

$$k_1 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \frac{1}{4}hk_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_2, z_n + \frac{1}{4}hl_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hl_2\right) =$$

$$= f_1(x, y, z, k_1, k_2, l_1, l_2);$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_1 + \frac{1}{4}hk_2, z_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hl_1 + \frac{1}{4}hl_2\right) = \\
&= f_2(x, y, z, k_1, k_2, l_1, l_2); \\
l_1 &= \varphi\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \frac{1}{4}hk_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_2, z_n + \frac{1}{4}hl_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hl_2\right) = \\
&= \varphi_1(x, y, z, k_1, k_2, l_1, l_2); \\
l_2 &= \varphi\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_1 + \frac{1}{4}hk_2, z_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hl_1 + \frac{1}{4}hl_2\right) = \\
&= \varphi_2(x, y, z, k_1, k_2, l_1, l_2); \tag{6.46}
\end{aligned}$$

Чтобы решить систему (6.45), необходимо прежде найти значения k_1, k_2, l_1, l_2 , то есть решить неявную систему уравнений (6.46).

Представим систему уравнений (6.46) в таком виде:

$$\begin{aligned}
k_1 - f_1(x, y, z, k_1, k_2, l_1, l_2) &= 0; \\
k_2 - f_2(x, y, z, k_1, k_2, l_1, l_2) &= 0; \\
l_1 - \varphi_1(x, y, z, k_1, k_2, l_1, l_2) &= 0; \\
l_2 - \varphi_2(x, y, z, k_1, k_2, l_1, l_2) &= 0, \tag{6.47}
\end{aligned}$$

или в векторной форме

$$K - F(x, y, z, K) = 0, \tag{6.48}$$

где $K = (k_1, k_2, l_1, l_2)^T$ или $K = (K_1, K_2, K_3, K_4)^T$;

$$F(x, y, z, K) = (f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2)^T.$$

Для решения системы (6.47) или (6.48) применим метод Ньютона:

$$K^{(s+1)} = K^{(s)} - G^{-1}\Phi, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \tag{6.49}$$

где $\Phi = K - F(x, y, z, K)$; G — матрица Якоби для матрицы Φ , то есть

$$G = \frac{\partial \Phi}{\partial K_i}, \quad \Phi = (K_1 - f_1, K_2 - f_2, K_3 - \varphi_1, K_4 - \varphi_2)^T, \text{ тогда}$$

$$G = \begin{bmatrix} E - \frac{\partial f_1}{\partial K_1} & \frac{\partial(K_1 - f_1)}{\partial K_2} & \frac{\partial(K_1 - f_1)}{\partial K_3} & \frac{\partial(K_1 - f_1)}{\partial K_4} \\ \frac{\partial(K_2 - f_2)}{\partial K_1} & E - \frac{\partial f_2}{\partial K_2} & \frac{\partial(K_2 - f_2)}{\partial K_3} & \frac{\partial(K_2 - f_2)}{\partial K_4} \\ \frac{\partial(K_3 - \varphi_1)}{\partial K_1} & \frac{\partial(K_3 - \varphi_1)}{\partial K_2} & E - \frac{\partial \varphi_1}{\partial K_3} & \frac{\partial(K_3 - \varphi_1)}{\partial K_4} \\ \frac{\partial(K_4 - \varphi_2)}{\partial K_1} & \frac{\partial(K_4 - \varphi_2)}{\partial K_2} & \frac{\partial(K_4 - \varphi_2)}{\partial K_3} & E - \frac{\partial \varphi_2}{\partial K_4} \end{bmatrix}.$$

После определения матрицы Якоби G вычисляется обратная матрица G^{-1} . Затем ее значение подставляется в уравнение (6.49), и находится вектор K на $(s+1)$ -й итерации. Итерации продолжаются до выполнения условия сходимости решения

$$\|K^{(s+1)} - K^{(s)}\| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – малая величина. За начальное значение вектора $K^{(0)}$ при расчете вектора (y, z) в следующей точке x_{n+1} можно брать значение вектора $K^{(s+1)}$ из предыдущей расчетной точки x_n .

В самом начале расчета в качестве начального значения вектора $K^{(0)}$ можно использовать величину вектора K , полученную для явного метода Рунге–Кутты четвертого порядка.

Возможно, значения вектора K , полученные посредством явной формулы Рунге–Кутты, можно использовать в качестве начальных данных и для расчетов в последующих точках x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Однако это требует соответствующей проверки.

6.7.3. Способы выбора начальных приближений

При решении задачи важным является вопрос выбора начального приближения, так как от него зависят сходимость решения и количество итераций, необходимых для достижения заданной точности. Для вычисления начального приближения используются различные способы:

1) явные формулы m -шаговых методов

$$y_n = -\sum_{k=1}^m \left(\frac{a_k}{a_0} y_{n-k} - \frac{h}{a_0} f(x_{n-k}, y_{n-k}) b_k \right);$$

2) явные формулы Адамса

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{a_0} \sum_{k=1}^m f(x_{n-k}, y_{n-k}) b_k;$$

3) интерполяционные формулы Эрмита

$$y_n = -\sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k y_{n-k} + h\beta_{m-1} f(x_{n-1}, y_{n-1});$$

формула второй степени

$$y_n = y_{n-2} + 2hf(x_{n-1}, y_{n-1});$$

формула третьей степени

$$y_n = -\frac{3}{2}y_{n-1} + 3y_{n-2} - \frac{1}{2}y_{n-3} + 3hf(x_{n-1}, y_{n-1});$$

формула четвертой степени

$$y_n = -\frac{10}{3}y_{n-1} + 6y_{n-2} - 2y_{n-3} + \frac{1}{3}y_{n-4} + 4hf(x_{n-1}, y_{n-1});$$

формула пятой степени

$$y_n = -\frac{65}{12}y_{n-1} + 10y_{n-2} - 5y_{n-3} + \frac{5}{3}y_{n-4} - \frac{1}{4}y_{n-5} + 5hf(x_{n-1}, y_{n-1});$$

формула шестой степени

$$y_n = -\frac{77}{10}y_{n-1} + 15y_{n-2} - 10y_{n-3} + 5y_{n-4} - \frac{3}{2}y_{n-5} + \frac{1}{5}y_{n-6} + 6hf(x_{n-1}, y_{n-1});$$

4) экстраполяционные формулы типа $y_n = -\sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k y_{n-k}$:

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + O(h);$$

$$y_n = 3y_{n-1} - 3y_{n-2} + y_{n-3} + O(h^2);$$

$$y_n = 4y_{n-1} - 6y_{n-2} + 4y_{n-3} - y_{n-4} + O(h^3);$$

$$y_n = 5y_{n-1} - 10y_{n-2} + 10y_{n-3} - 5y_{n-4} + y_{n-5} + O(h^4);$$

$$y_n = 6y_{n-1} - 15y_{n-2} + 20y_{n-3} - 15y_{n-4} + 6y_{n-5} - y_{n-6} + O(h^5).$$

6.8. О решении систем уравнений и уравнений высшего порядка

Рассмотренные методы решения одного обыкновенного дифференциального уравнения применимы также к решению систем дифференциальных уравнений и уравнений высшего порядка. Например, алгоритм решения системы двух уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y, z); \quad z' = \varphi(x, y, z)$$

при $x > x_0$; $y(x_0) = y_0$; $z(x_0) = z_0$,

наиболее распространенным явным методом Рунге–Кутты 4-го порядка можно представить следующим образом:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4);$$

$$k_1 = f(x_n, y_n, z_n); \quad l_1 = \varphi(x_n, y_n, z_n);$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}, z_n + \frac{hl_1}{2}\right); \quad l_2 = \varphi\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}, z_n + \frac{hl_1}{2}\right);$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}, z_n + \frac{hl_2}{2}\right); \quad l_3 = \varphi\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}, z_n + \frac{hl_2}{2}\right);$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3); \quad l_4 = \varphi(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3).$$

Применение многошаговых методов для решения систем уравнений также не вызывает затруднений.

Уравнения высшего порядка обычно решаются путём сведения их к системам уравнений первого порядка. Так, задачу Коши для уравнения порядка m

$$\frac{d^m z}{dx^m} = f(x, z, z', \dots, z^{(m)}) \quad \text{при } x > x_0;$$

$$z(x_0) = z_0; \quad z'(x_0) = A_1;$$

$$z''(x_0) = A_2; \quad z'''(x_0) = A_3;$$

.....

$$z^{(m-2)}(x_0) = A_{m-2}; \quad z^{(m-1)}(x_0) = A_{m-1}$$

(здесь $z_0, A_i, i = 1, 2, \dots, (m-1)$, — постоянные) путем введения новых переменных:

$$z' = u_1, \quad u_1' = u_2, \quad u_2' = u_3,$$

.....

$$u_{m-4}' = u_{m-3}, \quad u_{m-3}' = u_{m-2}, \quad u_{m-2}' = u_{m-1}$$

сводим к задаче Коши для системы m уравнений первого порядка:

$$U' = \Phi(x, U), \quad x > x_0, \quad U(x_0) = U^0,$$

где $U = (z, u_1, u_2, \dots, u_{m-1})^T$; $\Phi = (u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, f)^T$; $U^0 = (z_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1})^T$. После этого она решается одним из рассмотренных выше методов.

Например, задача Коши для уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned} z''' &= f(x, z, z', z'') \text{ при } x > x_0; \\ z(x_0) &= z_0; \quad z'(x_0) = A; \quad z''(x_0) = B, \end{aligned}$$

путем введения новых переменных $z' = u$, $u' = v$ приводится к системе трех уравнений первого порядка:

$$v' = f(x, y, z, v);$$

$$u' = v;$$

$$z' = u;$$

при $x > x_0$ $z(x_0) = z_0$; $u(x_0) = A$; $v(x_0) = B$.

Представим эту систему в векторном виде:

$$U' = \Phi(x, U), \quad x > x_0;$$

$$U(x_0) = U_0,$$

где

$$U = \begin{bmatrix} z \\ u \\ v \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f \end{bmatrix},$$

а затем решаем ее каким-либо методом.

7. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

7.1. Методы решения

Краевыми задачами называются задачи, в которых дополнительные условия задаются при двух значениях независимой переменной (на концах рассматриваемого участка). Такие задачи получаются при решении уравнений высших порядков или систем уравнений.

Например, требуется найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \quad (7.1)$$

на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющего на концах отрезка условиям:

$$u(a) = A; \quad u(b) = B. \quad (7.2)$$

Здесь A и B — постоянные. Граничные условия могут быть заданы и в более общем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= A; \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= B. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Коэффициенты α_i, β_i ($i = 1, 2$) определяются физическими условиями задачи.

Методы решения краевых задач подразделяются на точные аналитические, приближённые и численные.

Аналитические методы изучаются в курсе дифференциальных уравнений и применимы лишь для решения узкого класса уравнений, например, для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и др..

Приближённые методы возникли до появления ЭВМ и не утратили до сих пор своего значения. Это — методы коллокаций, наименьших квадратов, метод Бубнова–Галёркина, вариационные и проекционные методы.

Численные методы решения дифференциальных уравнений подразделяются на три группы: 1) методы сведения решения краевой задачи к последовательности решений задач Коши; 2) методы конечных разностей; 3) методы конечных элементов.

Рассмотрим подробнее некоторые упомянутые методы.

7.2. Метод коллокаций

Этот метод позволяет найти приближённое решение краевой задачи в виде аналитического выражения. Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \quad (7.4)$$

на отрезке $x \in [a, b]$ при краевых условиях общего вида:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= A; \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= B. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Выберем некоторую совокупность линейно независимых базисных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, из которых $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям (7.5), а остальные функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют однородным краевым условиям.

Приближённое решение краевой задачи (7.4), (7.5) ищем в виде линейной комбинации базисных функций

$$y = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x).$$

Такая функция y удовлетворяет краевым условиям при любых a_i . Подставляя функцию $y = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$ в уравнение (7.4), получим некоторый остаточный член $\psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$, не равный нулю, поскольку функция y не является точным решением уравнения (7.4). Функция $\psi(x, a)$ называется невязкой.

Если при выборе коэффициентов a_i будет выполнено условие $\psi(x, a) = 0$ для всех $x \in [a, b]$, то функция $y(x)$ будет точным решением уравнения (7.4). Однако так подобрать коэффициенты a_i практически невозможно. Поэтому ограничиваются требованием равенства нулю невязки в заданном множестве точек x_1, x_2, \dots, x_n на отрезке $[a, b]$ — точки коллокаций. В этих точках дифференциальное уравнение (7.4) будет удовлетворяться точно. Таким образом, получается система алгебраических уравнений:

$$\psi(x_1, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 ;$$

$$\psi(x_2, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 ;$$

.....

$$\psi(x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

относительно неизвестных $a_i, i = 1, 2, \dots, n$. Число точек коллокаций должно согласовываться с количеством базисных функций. Чем больше используется базисных функций и, соответственно, точек коллокаций, тем точнее получается приближённое решение.

Пример. Методом коллокаций решить краевую задачу

$$u'' - 2xu + 2u = x^2 \text{ на отрезке } [0, 1] \text{ при } u(0) = 1; \quad u(1) = 0.$$

Решение. В качестве базисных функций выбираем полиномы $\varphi_n(x) = x^n(1-x), n = 0, 1, 2, \dots$. Функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям $\varphi_0(0) = 1$, а функции $\varphi_n(x), n = 1, 2, \dots$, — однородным краевым условиям $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$. Точками коллокаций примем точки $x_1 = 1/3; x_2 = 2/3$. Ограничимся тремя базисными функциями и положим приближенное решение уравнения равным

$$y = (1-x) + a_1(x-x^2) + a_2(x^2-x^3).$$

В результате невязка $\psi(x, a_1, a_2)$ будет равна

$$\psi(x, a_1, a_2) = 2 - x^2 + 2a_1(x^2 - 1) + 2a_2(1 - 3x - x^2 + 2x^3).$$

Подставляя координаты точек коллокаций $x_1 = 1/3$; $x_2 = 2/3$ в выражение невязки, получим систему уравнений для определения коэффициентов a_1, a_2 :

$$\begin{cases} 48a_1 + 2a_2 = 51; \\ 18a_1 - 46a_2 = -42. \end{cases}$$

Отсюда находим $a_1 = 1,008$, $a_2 = 1,307$ и приближённое решение будет иметь вид

$$y \approx 1 + 0,3x^2 + 1,3x^3.$$

7.3. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим решение методом наименьших квадратов линейного дифференциального уравнения (7.1). Выбираем некоторую базисную систему линейно независимых функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$. При этом $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным, а остальные функции $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют однородным краевым условиям (7.3). Приближённое решение ищется в виде

$$y = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Подставляя функцию y в дифференциальное уравнение (7.1), получаем невязку

$$\psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = y'' + p(x)y' + q(x)y - f,$$

которая на отрезке $[a, b]$ должна быть минимальной по абсолютной величине.

Это требование выполняется при условии минимального значения интеграла от квадрата невязки

$$S = \int_a^b \psi^2(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = \min.$$

Для получения минимума интеграла S необходимо приравнять к нулю частные производные S по коэффициентам a_i , то есть

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \int_a^b \psi \frac{\partial \psi}{\partial a_1} dx = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \int_a^b \psi \frac{\partial \psi}{\partial a_2} dx = 0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_n} = 2 \int_a^b \psi \frac{\partial \psi}{\partial a_n} dx = 0. \quad (7.6)$$

В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно a_i , откуда и определяются их значения.

Пример. Интегральным методом наименьших квадратов решить предыдущую краевую задачу

$$u'' - 2xu + 2u = x^2 \text{ на отрезке } [0, 1] \text{ при } u(0) = 1; \quad u(1) = 0. \quad (7.7)$$

Выбирая базисные функции в виде $\varphi_0(x) = (1 - x)$; $\varphi_1(x) = (x - x^2)$; $\varphi_2(x) = (x^2 - x^3)$, решение задачи ищем в виде

$$y = (1 - x) + a_1(x - x^2) + a_2(x^2 - x^3).$$

Подставляя в (7.7) функцию y , получаем невязку $\psi(x, a_i)$:

$$\psi(x, a_1, a_2) = 2 - x^2 + 2a_1(x^2 - 1) + 2a_2(1 - 3x - x^2 + 2x^3).$$

В этом случае интеграл от квадрата невязки будет иметь вид

$$S = \int_0^1 \psi^2(x, a_1, a_2) dx = \int_0^1 [2 - x^2 + 2a_1(x^2 - 1) + 2a_2(1 - 3x - x^2 + 2x^3)]^2 dx,$$

и уравнения (7.6) принимают следующий вид:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_1} = \int_0^1 (x^2 - 1)[2a_1(x^2 - 1) + 2a_2(1 - 3x - x^2 + 2x^3) + 2 - x^2] dx = 0;$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_2} = \int_0^1 (1 - 3x - x^2 + 2x^3)[2a_1(x^2 - 1) + 2a_2(1 - 3x - x^2 + 2x^3) + 2 - x^2] dx = 0,$$

а после интегрирования получаем уравнения:

$$32a_1 + 3a_2 = 36;$$

$$a_1 + 10,762a_2 = 3,833,$$

решая которые, находим коэффициенты $a_1 = 1,1012$; $a_2 = 0,2538$ и приближенное решение задачи

$$y = 1 + 0,1012x - 0,8474x^2 - 0,2538x^3.$$

Для приближённого решения краевой задачи часто ищут минимум не интеграла от квадрата невязки, а минимум конечной суммы $\psi^2(x)$:

$$S = \sum_{i=0}^n \psi^2(x, a_1, a_2, \dots, a_m),$$

на некотором множестве точек $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$.

7.4. Метод Бубнова–Галеркина

Рассмотрим метод Бубнова–Галеркина [36] решения линейных дифференциальных уравнений. Этот метод основывается на теореме общих рядов Фурье. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная система ортогональных функций с ненулевой нормой на отрезке $[a, b]$. Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна на $[a, b]$ ко всем функциям $\varphi_n(x)$, то есть

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = 0, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.8)$$

то $f(x) \equiv 0$ при $x \in [a, b]$.

Доказательство. Ряд Фурье для $f(x)$ относительно системы ортогональных функций можно представить в виде

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Из теории рядов Фурье известно, что коэффициенты Фурье определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \text{ где } \|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx > 0.$$

Согласно условию (7.8) имеем

$$c_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для любой непрерывной функции $f(x)$, как известно, в случае полной системы базисных функций $\{\varphi_n(x)\}$ выполняется равенство полноты

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n^2.$$

Отсюда, учитывая $c_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$, получаем

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0,$$

следовательно, $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$.

Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна лишь к конечной системе функций $\varphi_i(x)$, то есть $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n^2 < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — малая величина при достаточно большом N . В этом случае $f(x)$ в среднем на отрезке $[a, b]$ будет сколь угодно мала.

Алгоритм метода Бубнова–Галёркина также основан на выборе базисной системы линейно независимых функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, из которых $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям, а остальные функции $\varphi_i(x)$ удовлетворяют однородным краевым условиям.

На основе этой базисной системы строится приближённое решение задачи в виде их линейной комбинации

$$y = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Подставляя эту функцию в дифференциальное уравнение, получаем невязку

$$\psi(x, a_i) = L[\varphi_0] + \sum_{i=1}^n a_i L[\varphi_i] - f(x)$$

Здесь $L[\varphi_0]$ — дифференциальный оператор; $f(x)$ — правая часть уравнения; $L(u) = f(x)$ — дифференциальное уравнение. Например,

$$L(u) = u'' + p(x)u' + q(x)u.$$

Согласно методу Бубнова–Галёркина требуем, чтобы невязка была ортогональна к базисным функциям $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, что при достаточно большом их числе обеспечивает малость невязки в среднем. В результате получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a_i , $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\int_a^b \varphi_1(x) \psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0;$$

$$\int_a^b \varphi_2(x) \psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0;$$

.....

$$\int_a^b \varphi_n(x) \psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0.$$

Разрешая эту систему, находим коэффициенты a_i и приближенное решение задачи y .

Пример. Найти методом Бубнова–Галёркина приближённое решение краевой задачи

$$u'' - 2xu + 2u = x^2 \text{ на отрезке } [0, 1] \text{ при условиях } u(0) = 1; u(1) = 0.$$

Решение. Ради простоты будем рассматривать три базисные функции $\varphi_i(x)$:

$$\varphi_0(x) = 1 - x; \quad \varphi_1(x) = x(1 - x); \quad \varphi_2(x) = x^2(1 - x).$$

Приближённое решение ищем в виде

$$y = (1 - x) + a_1(x - x^2) + a_2(x^2 - x^3).$$

Подставляя $y(x)$ в дифференциальное уравнение, получаем невязку $\psi(x)$:

$$\psi(x, a_1, a_2) = 2 - x^2 + 2a_1(x^2 - 1) + 2a_2(1 - 3x - x^2 + 2x^3).$$

Из условия ортогональности невязки к базисным функциям получаем систему двух линейных уравнений для коэффициентов $a_i, i = 1, 2$:

$$\int_0^1 (x - x^2) \psi(x, a_1, a_2) dx = 0;$$

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) \psi(x, a_1, a_2) dx = 0. \quad (7.9)$$

Подставляя в уравнение (7.9) значения $\psi(x, a_i)$, после интегрирования получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$14a_1 + 8a_2 = 17;$$

$$21a_1 + 22a_2 = 28.$$

Отсюда находим коэффициенты $a_1 = 1,07143$, $a_2 = 0,25$ и приближенное решение задачи $y(x)$:

$$y = 1 + 0,07143x - 0,757143x^2 - 0,25x^3.$$

Для получения более точного решения необходимо использовать большее количество базисных функций.

Для решения нелинейных дифференциальных уравнений с нелинейными граничными условиями можно также применять рассмотренные выше методы. При этом искомая функция $y(x)$, определяемая как

$$y = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x),$$

должна, во-первых, удовлетворять краевым условиям при любых значениях коэффициентов $a_i, i = 1, 2, \dots, n$. Во-вторых, в результате минимизации невязки или ее ортогонализации относительно базисных функций получается система нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, которая должна решаться каким-либо итерационным методом.

7.5. Вариационный метод Ритца

Вариационные методы (частный случай проекционных) применяются для решения задач, которые сводятся к задачам отыскания экстремумов функционала. Согласно этому принципу решение задачи $u(x)$ должно быть стационарной точкой вариационного функционала

$$\Phi(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx. \quad (7.10)$$

Вариационный функционал обычно имеет определенный физический смысл. Часто он выражает потенциальную энергию физической системы.

Пусть U — множество непрерывных кусочно-гладких функций, на котором определен функционал $\Phi(u)$, удовлетворяет граничным условиям:

$$u(a) = u_a; \quad u(b) = u_b, \quad (7.11)$$

где u_a и u_b заданы.

Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$ является стационарной точкой функционала (7.10). Тогда согласно вариационному исчислению эта функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$-\frac{d}{dx} F_{u'}(x, u, u') + F_u(x, u, u') = 0, \quad (7.12)$$

которое называется уравнением Эйлера. Здесь $F_{u'}(x, u, u') = \partial F / \partial u'$; $F_u(x, u, u') = \partial F / \partial u$. Следовательно, решение вариационной задачи сводится к решению краевой задачи (7.12), (7.11). При некоторых условиях эти задачи оказываются эквивалентными, и появляется возможность решать определенный класс краевых задач методами вариационного исчисления.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_a^b (k(u')^2 + qu^2) dx - \int_a^b fudx, \quad (7.13)$$

где $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие условиям: $k(x) \geq k_0 > 0$; $q(x) \geq 0$. Вариационная задача о поиске минимума функционала (7.13) на множестве U сводится к решению уравнения Эйлера (7.12), где

$$F(x, u, u') = \frac{1}{2} (k(x)(u')^2 + q(x)u^2) - f(x)u,$$

и окончательно получаем уравнение Эйлера

$$-(ku')' + qu = f \quad (7.14)$$

с граничными условиями (7.11): $u(a) = u_a$; $u(b) = u_b$.

В вариационном исчислении доказывается, что функция $u(x)$ является точкой минимума функционала (7.13)

$$\Phi(u) = \min_{u \in U} \Phi(u),$$

если она является решением краевой задачи (7.14), (7.11).

Достоинство вариационной постановки задачи (7.14), (7.11) заключается в том, что в ней не требуется наличия у рассматриваемых функций второй производной и непрерывности первой производной. Это является важным для многих приближенных методов.

Метод Рунта является приближенным методом решения вариационной задачи о поиске минимума функционала $\Phi(y)$ на множестве Y . Приближенное решение $y(x)$ ищется в виде комбинации системы линейно независимых базисных функций $\varphi_i(x)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x). \quad (7.15)$$

Предполагается, что их линейная комбинация $\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x)$ при соответствующем выборе коэффициентов α_i будет аппроксимировать решение задачи с достаточной степенью точности.

Обозначим через Y множество всех функций (7.15) при фиксированных $\varphi_i(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$y(a) = u_a; \quad y(b) = u_b. \quad (7.16)$$

Потребуем, чтобы базисные функции удовлетворяли условиям:

$$\varphi_0(a) = 1; \quad \varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0 \quad \text{для } i \geq 1; \quad \varphi_n(b) = 1.$$

Отсюда и из уравнения (7.16) получаем, что

$$\alpha_0 = u_a; \quad \alpha_n = u_b.$$

Согласно методу Рунта приближенное решение $y(x)$ определяется как функция, минимизирующая функционал $\Phi(y)$ на множестве Y :

$$\Phi(y) = \min_{y \in Y} \Phi(y). \quad (7.17)$$

Учитывая вид функции $y(x)$, можно сделать вывод, что задача (7.17) представляет собой задачу минимизации функции $\Phi(y(x)) = \Phi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x)\right)$ от $(n-1)$ переменных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$. Значения α_0 и α_n известны. Остальные параметры α_i находятся из условия минимума функционала $\Phi(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \Phi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1). \quad (7.18)$$

Отсюда получается система $(n - 1)$ уравнений для определения коэффициентов $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, (n - 1)$, а, следовательно, находится приближенное решение

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x).$$

Пример. Рассмотрим решение методом Ритца краевой задачи (7.14)

$$-(ku')' + qu = f \quad (7.19)$$

$$\text{при } u(a) = u_a; \quad u(b) = u_b.$$

Решение. Функционал для нее имеет вид (7.13)

$$\Phi(y) = \Phi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i\right) = \frac{1}{2} \int_a^b \left[k \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i'\right)^2 + q \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i\right)^2 \right] dx - \int_a^b f \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i dx;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \Phi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i\right) &= \int_a^b \left[k \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i'\right) \varphi_j' + q \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i\right) \varphi_j \right] dx - \int_a^b f \varphi_j dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b (k \varphi_i' \varphi_j' + q \varphi_i \varphi_j) dx \right) \alpha_i - \int_a^b f \varphi_j dx. \end{aligned}$$

Система (7.18), (7.16) превращается в данном случае в систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} \alpha_j = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, (n-1), \quad (7.20)$$

где

$$a_{ij} = \int_a^b (k \varphi_i' \varphi_j' + q \varphi_i \varphi_j) dx; \quad b_j = \int_a^b f \varphi_j dx,$$

или в векторном виде

$$A\alpha = d,$$

где A — матрица порядка $(n-1)$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})^T$ и $d = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1})^T$ — векторы; причем $d_j = b_j - \alpha_{j0} u_a - \alpha_{jn} u_b, j = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Здесь A — симметричная положительно определенная матрица.

7.6. Метод стрельбы

Рассмотрим краевую задачу общего вида

$$u'' = f(x, u, u') \quad \text{для } x \in [a, b] \quad (7.21)$$

с краевыми условиями общего вида:

$$\begin{aligned}\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= A; \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= B.\end{aligned}\tag{7.22}$$

Здесь $A, B, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ — заданные константы. Для удобства решения задачи приведем уравнение второго порядка (7.21) к системе двух уравнений первого порядка введением новой переменной $z = u'(x)$:

$$\begin{aligned}z' &= f(x, u, z); \\ u' &= z; \quad x \in [a, b].\end{aligned}\tag{7.23}$$

Граничные условия (7.22) при этом принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha_1 u(a) + \beta_1 z(a) &= A; \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 z(b) &= B.\end{aligned}\tag{7.24}$$

Метод стрельбы заключается в сведении решения краевой задачи (7.23), (7.24) к решению ряда задач Коши для уравнений (7.23) с начальными условиями:

$$u(a, \gamma) = (A - \beta_1 \gamma) / \alpha_1; \quad z(a) = \gamma.$$

Здесь $u(a, \gamma)$ — точка на оси ординат, в которой помещается начало интегральной кривой $u(x)$; γ — угол наклона касательной к интегральной кривой в точке $x = a$ (рис. 6). Это искомый параметр, значение которого при начальном счете задается произвольно, исходя из физических соображений.

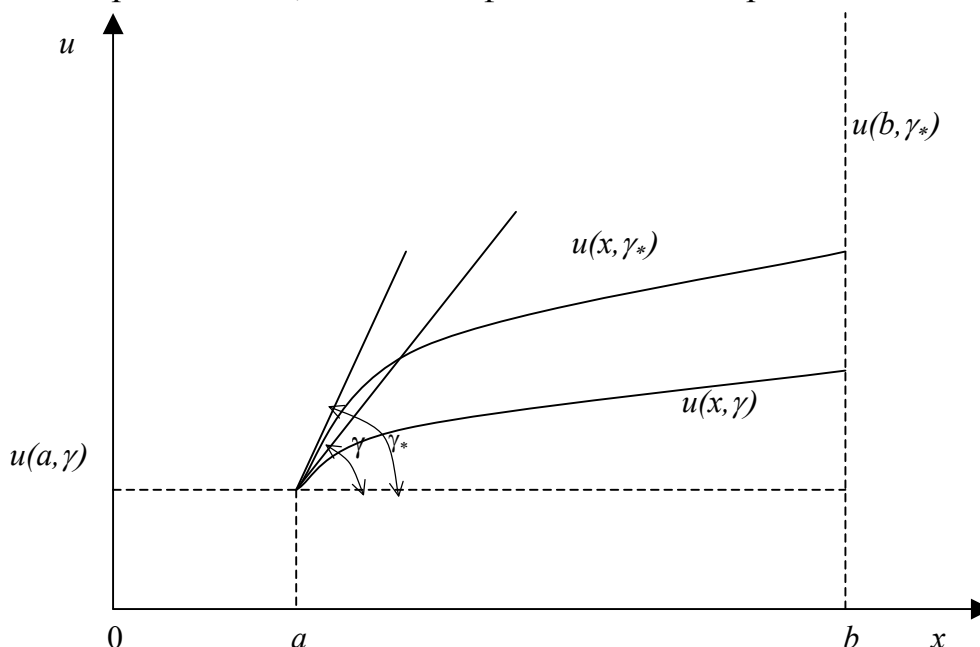


Рис 6. Метод стрельбы

Считая решение задачи Коши $u = u(x, \gamma)$ зависящим от параметра γ , будем искать такую интегральную кривую $u = u(x, \gamma^*)$, которая выходит из точ-

ки $(a, u(a, \gamma^*))$ и попадает в точку $(b, u(b))$, то есть, если $\gamma = \gamma^*$, то решение $u(x, \gamma^*)$ задачи Коши совпадает с решением $u(x)$ краевой задачи. Таким образом, при $x = b$ получаем нелинейное уравнение от параметра γ :

$$u(b, \gamma) - (B - \beta_2 z(b)) / \alpha_2 = 0,$$

то есть уравнение вида

$$F(\gamma) = 0,$$

где

$$F(\gamma) = u(b, \gamma) - (B - \beta_2 z(b)) / \alpha_2.$$

Хотя это уравнение нельзя записать в виде некоторого аналитического выражения (оно является решением задачи Коши), для его решения может быть использован любой из методов решения нелинейных уравнений: метод половинного деления, метод Ньютона и др.

Например, метод половинного деления. Находим начальный отрезок $[\gamma_0, \gamma_1]$, содержащий параметр γ^* , на концах которого функция $F(\gamma)$ принимает значения разных знаков. Далее делим отрезок $[\gamma_0, \gamma_1]$ пополам и решаем задачу Коши при $\gamma = \gamma_2 = (\gamma_0 + \gamma_1)/2$. В соответствии с методом деления отрезка пополам отбрасываем один из отрезков: $[\gamma_0, \gamma_2]$ или $[\gamma_2, \gamma_1]$, на котором функция $F(\gamma)$ не меняет знак, и так далее, пока полученный отрезок не станет меньше заданной погрешности решения $\varepsilon > 0$, $|\gamma_n - \gamma_{n-1}| < \varepsilon$. Решением γ^* будет любая точка отрезка $[\gamma_n, \gamma_{n-1}]$. Этот метод хорошо работает, если функция $u(x, \gamma)$ не слишком чувствительна к изменениям γ , в противном случае может возникнуть неустойчивость в решении.

Более надежным способом решения задачи методом стрельбы является метод Ньютона. Он состоит в следующем. Пусть γ_0 — некоторое приближение γ . Тогда $\gamma^* = \gamma_0 + \Delta\gamma$ — искомое значение γ . Здесь $\Delta\gamma$ — малое приращение γ . Решая задачу Коши при $\gamma = \gamma_0$, получаем $u(x, \gamma_0)$. Разлагая функцию $u(b, \gamma^*)$ в ряд Тейлора в окрестности точки γ_0 по $\Delta\gamma$, получаем

$$u(b, \gamma_0 + \Delta\gamma) \approx u(b, \gamma_0) + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \Delta\gamma.$$

Полагая $u(b, \gamma_0 + \Delta\gamma) = u(b, \gamma^*) = (B - \beta_2 z(b)) / \alpha_2$, находим

$$\Delta\gamma = \frac{(B - \beta_2 z(b)) / \alpha_2 - u(b, \gamma_0)}{\partial u(b, \gamma_0) / \partial \gamma}.$$

Производную $\partial u(b, \gamma_0) / \partial \gamma$ находим из выражения

$$\frac{\partial u(b, \gamma_0)}{\partial \gamma} \approx \frac{u(b, \gamma_0 + \delta\gamma) - u(b, \gamma_0)}{\delta\gamma}. \quad (7.25)$$

Здесь $\delta\gamma$ — произвольное малое возмущение γ .

Для нахождения $\partial u / \partial \gamma$ нужно дополнительно решить задачу Коши при $\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma$, в результате чего найдем $u(b, \gamma_0 + \delta\gamma)$. Затем по формуле (7.25)

находим поправку $\Delta\gamma$ и вычисляем следующее приближение параметра γ : $\gamma_1 = \gamma_0 + \Delta\gamma$ и так далее. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока очередное значение поправки $\Delta\gamma$ по абсолютной величине не станет меньше некоторого малого числа $\varepsilon > 0$, погрешности решения: $\Delta\gamma < \varepsilon$.

Методом стрельбы можно также решать краевую задачу, используя конечно-разностную аппроксимацию уравнений (7.21), (7.22). При этом нужно проверять устойчивость используемой для решения задачи Коши разностной схемы.

7.7. Метод конечных разностей

Этот метод сводит решение краевой задачи для дифференциального уравнения к решению системы алгебраических уравнений относительно искомой функции на заданном множестве точек. Это достигается путем замены производных, входящих в дифференциальное уравнение, их конечно-разностными аппроксимациями.

Пусть задана краевая задача

$$u'' + pu' + qu = f(x) \text{ на отрезке } [a, b] \quad (7.26)$$

при граничных условиях

$$u(a) = u_a; \quad u(b) = u_b.$$

Здесь u_a, u_b — постоянные. Введем сетку ω_h в области решения, разбив отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, $h = (b - a)/n$. Введем сеточные функции: $y_i = y(x_i)$; $p_i = p(x_i)$; $q_i = q(x_i)$; $f_i = f(x_i)$, определенные в узлах этой сетки ω_h .

Заменим производные, входящие в уравнение (7.26), их конечно-разностными аппроксимациями:

$$u'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad u''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение (7.26), получаем систему разностных уравнений

$$F(x_i, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (7.27)$$

при граничных условиях $y_0 = u_a$; $y_n = u_b$,

являющуюся системой $(n-1)$ алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции y_1, y_2, \dots, y_{n-1} . Значения y_0 и y_n берутся из граничных условий, если они заданы непосредственно.

Если граничные условия задаются в общем виде:

$$\begin{aligned}\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= \varphi_a; \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= \varphi_b,\end{aligned}\tag{7.28}$$

то они также должны представляться в разностном виде путем аппроксимации производных $u'(a)$ и $u'(b)$ конечно-разностными соотношениями. Например, при аппроксимации односторонними разностями:

$$\begin{aligned}\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{2h} &= \varphi_a; \\ \alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= \varphi_b.\end{aligned}\tag{7.29}$$

Отсюда находятся значения y_0 и y_n , и система (7.27) тогда решается совместно с уравнениями (7.29).

Часто для повышения порядка точности задания граничных условий (7.28) они аппроксимируются симметричными разностями:

$$u'(a) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}; \quad u'(b) = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}.$$

В этом случае приходится вводить фиктивные точки x_{-1} и x_{n+1} , лежащие вне рассматриваемого отрезка $[a, b]$. Количество неизвестных увеличивается на два. Для замыкания системы привлекают еще два разностных уравнения (7.27) при $i = 0, n$.

7.8. Метод прогонки решения разностных уравнений

Рассмотрим метод скалярной прогонки на примере решения следующей краевой задачи:

$$u''(x) + qu'(x) + pu(x) = f(x); \tag{7.30}$$

$$p > 0; \quad a \leq x \leq b; \quad u(a) = A; \quad u(b) = B.$$

Введём сетку ω_h на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = (b - a)/n$; $x_i = (a + ih)$, $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$, а также сеточные функции, определённые на ω_h . Запишем уравнения (7.30) в каждой точке сетки ω_h :

$$u''(x_i) + q(x_i)u'(x_i) + p(x_i)u(x_i) = f(x_i).$$

Аппроксимируя производные конечными разностями, получим систему $(n-1)$ линейных уравнений:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + p(x_i)y_i = f(x_i) \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{1}{h} - \frac{q_i}{2}\right)y_{i-1} + \left(hp_i - \frac{2}{h}\right)y_i + \left(\frac{1}{h} + \frac{q_i}{2}\right)y_{i+1} = hf_i, \quad (7.31)$$

где $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ с граничными условиями:

$$y_0 = A; \quad y_n = B. \quad (7.32)$$

Здесь $q_i = q(x_i)$; $p_i = p(x_i)$; $f_i = f(x_i)$.

Полученная система разностных уравнений имеет трёхдиагональную матрицу, элементы которой равны нулю везде, кроме главной диагонали и двух её окружающих.

Систему (7.31), (7.32) решаем методом скалярной прогонки, являющейся разновидностью метода исключения Гаусса. Для общности запишем уравнения (7.31) в таком виде:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i; \quad (7.33)$$

$$y_0 = A; \quad y_n = B, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1),$$

где

$$a_i = \left(\frac{1}{h} - \frac{q_i}{2}\right); \quad b_i = \left(hp_i - \frac{2}{h}\right); \quad c_i = \left(\frac{1}{h} + \frac{q_i}{2}\right); \quad d_i = hf_i.$$

При $i = 1$ уравнение будет иметь вид

$$a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 = d_1.$$

Разрешим его относительно y_1 :

$$y_1 = -\frac{c_1}{b_1} y_2 + \frac{d_1 - a_1 y_0}{b_1},$$

и запишем его как

$$y_1 = L_1 y_2 + K_1, \quad \text{где } L_1 = -\frac{c_1}{b_1}; \quad K_1 = \frac{d_1 - a_1 A}{b_1}.$$

Дальнейшие решения системы (7.33) будем искать в виде $y_i = L_i y_{i+1} + K_i$.

Пусть получено решение для y_{i-1} : $y_{i-1} = L_{i-1} y_i + K_{i-1}$. Найдём аналогичное выражение для y_i из уравнения (7.33), исключив из него переменную y_{i-1} при помощи найденного решения $y_{i-1} = L_{i-1} y_i + K_{i-1}$. Для этого подставим y_{i-1} в уравнение (7.33):

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i.$$

В результате получим уравнение

$$a_i L_{i-1} y_i + a_i K_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i;$$

$$y_i (a_i L_{i-1} + b_i) = -c_i y_{i+1} + d_i - a_i K_{i-1}.$$

Разрешив его относительно y_i , имеем

$$y_i = \frac{-c_i}{a_i L_{i-1} + b_i} y_{i+1} + \frac{d_i - a_i K_{i-1}}{a_i L_{i-1} + b_i},$$

$$\text{или } y_i = L_i y_{i+1} + K_i,$$

где выражения

$$L_i = \frac{-c_i}{a_i L_{i-1} + b_i}; \quad K_i = \frac{d_i - a_i K_{i-1}}{a_i L_{i-1} + b_i}$$

являются рекуррентными формулами для вычисления коэффициентов L_i и K_i , для произвольных значений $i = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Таким образом, в процессе исключения неизвестных система алгебраических уравнений (7.33) с трёхдиагональной матрицей свелась к системе уравнений с двухдиагональной матрицей вида

$$y_i = L_i y_{i+1} + K_i.$$

Для ее решения необходимо вначале вычислить коэффициенты L_i и K_i для $i = 1, 2, \dots, (n-1)$. Процесс их вычисления называется прямым ходом или прямой прогонкой и начинается с $i = 0$ (с левого конца). Начальные значения L_0 и K_0 получаем из уравнения с учетом граничного условия при $i = 0$:

$$y_0 = L_0 y_1 + K_0.$$

Так как $y_0 = A$, из уравнения следует: $L_0 = 0$; $K_0 = A$.

Последующие значения L_i и K_i получаются из рекуррентных формул:

$$L_i = \frac{-c_i}{a_i L_{i-1} + b_i}; \quad K_i = \frac{d_i - a_i K_{i-1}}{a_i L_{i-1} + b_i}, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Неизвестные значения функции y_i определяются обратной прогонкой, начиная с правого конца отрезка, по рекуррентной формуле

$$y_i = L_i y_{i+1} + K_i \quad \text{для } i = (n-1), (n-2), \dots, +1.$$

Так как y_n задано, $y_n = B$, то последовательно получаем:

$$y_{n-1} = L_{n-1} y_n + K_{n-1};$$

$$y_{n-2} = L_{n-2} y_{n-1} + K_{n-2};$$

.....

$$y_1 = L_1 y_2 + K_1.$$

Рассмотрим применение метода прогонки для краевой задачи (7.30) при граничных условиях общего вида (7.28):

$$u''(x) + qu'(x) + pu(x) = f(x); \quad (7.34)$$

$$p > 0, \quad a \leq x \leq b;$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \varphi_a;$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \varphi_b. \quad (7.35)$$

В этом случае решение системы разностных уравнений (7.33)

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i;$$

$$(7.36)$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

осложняется использованием граничных условий общего вида (7.35), аппроксимацию которых необходимо производить согласованно с порядком аппроксимации дифференциального уравнения (7.34), то есть со вторым порядком точности:

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \varphi_a;$$

$$\alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = \varphi_b. \quad (7.37)$$

В результате приходится дополнительно ввести две фиктивные точки x_{-1} и x_{n+1} , лежащие вне рассматриваемого отрезка $[a, b]$, и две переменные y_{-1} , y_{n+1} , а для замыкания системы (7.36) привлечь еще два разностных уравнения (7.36) при $i = 0, n$:

$$a_0 y_{-1} + b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0;$$

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n + c_n y_{n+1} = d_n. \quad (7.38)$$

Полученная система линейных уравнений (7.36), (7.38) совместно с (7.37) решается следующим образом. Из левого граничного условия (7.37) находится y_{-1} :

$$y_{-1} = y_1 + 2h(\alpha_1 y_0 - \varphi_a) / \beta_1,$$

и подставляется в первое уравнение (7.38)

$$y_0(b_0 + 2ha_0\alpha_1 / \beta_1) + y_1(a_0 + c_0) = d_0 + 2ha_0\varphi_a / \beta_1.$$

Затем полученное уравнение разрешается относительно y_0 :

$$y_0 = L_0 y_1 + K_0,$$

где
$$L_0 = -\frac{a_0 + c_0}{b_0 + 2ha_0\alpha_1 / \beta_1}; \quad K_0 = \frac{d_0 + 2ha_0\varphi_a / \beta_1}{b_0 + 2ha_0\alpha_1 / \beta_1}.$$

Далее решение системы (7.36) ищется, как и ранее, в виде

$$y_i = L_i y_{i+1} + K_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, (n-1),$$

а коэффициенты L_i и K_i определяются по рекуррентным формулам:

$$L_i = \frac{-c_i}{a_i L_{i-1} + b_i}; \quad K_i = \frac{d_i - a_i K_{i-1}}{a_i L_{i-1} + b_i}, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Расчет коэффициентов L_i и K_i — это прямой ход прогонки.

Обратный ход начинаем с левого граничного условия. Определяя значение y_{n+1} из (7.37)

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h(\varphi_b - \alpha_2 y_n) / \beta_2$$

и подставляя его во второе уравнение (7.38), получаем:

$$y_{n-1}(a_n + c_n) + y_n(b_n - c_n 2h\alpha_2 / \beta_2) = d_n - c_n 2h\varphi_b / \beta_2;$$

$$y_{n-1} = -\frac{b_n - 2hc_n\alpha_2 / \beta_2}{a_n + c_n} y_n + \frac{d_n - 2hc_n\varphi_n / \beta_2}{a_n + c_n}.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением

$$y_{n-1} = L_{n-1} y_n + K_{n-1},$$

находим значение y_n на правой границе отрезка $[a, b]$. Последующие значения неизвестных y_i для $i = (n-1), (n-2), \dots, 1$ находятся по рекуррентной формуле $y_i = L_i y_{i+1} + K_i$:

$$y_{n-1} = L_{n-1} y_n + K_{n-1};$$

$$y_{n-2} = L_{n-2} y_{n-1} + K_{n-2};$$

.....

$$y_1 = L_1 y_2 + K_1.$$

Однако не для всяких систем уравнений применим метод скалярной прогонки. Условием хорошей обусловленности системы уравнений и устойчивости прогонки является выполнение условия $|b_i| \geq |a_i| + |c_i| + \delta$, $\delta > 0$ — малая величина, то есть условие диагонального преобладания матрицы коэффициентов.

Библиографический список

1. **Бахвалов, Н. С.** Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
2. **Бабенко, К. И.** Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
3. **Годунов, С. К.** Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
4. **Бахвалов, Н. С.** Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
5. **Самарский, А. А.** Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
6. **Амосов, А. А.** Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
7. **Калиткин, Н. Н.** Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
8. **Волков, Е. А.** Численные методы. – М.: Наука, 1982. – 248 с.
9. **Турчак, Л. И.** Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
10. **Арушанян, О. Б.** Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране / О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин. – М.: МГУ, 1990 – 336 с.
11. **Мак-Кракен, Д.** Численные методы и программирование на Фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М.: Мир, 1977. – 584 с.
12. **Вержбицкий, В. М.** Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учебн. пос. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
13. **Копченова, Н. В.** Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
14. **Бахвалов, Н. С.** Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М.: Высш. шк., 2000. – 190 с.
15. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
16. **Ортега, Дж.** Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
17. **Демидович, Б. П.** Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
18. **Коллатц, Л.** Численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1953. – 168 с.
19. **Милн, В. Э.** Численное решение дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1955. – 352 с.
20. **Хеминг, Р. В.** Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
21. **Ракитский, Ю. В.** Численные методы решения жестких систем / Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий. – М.: Наука, 1979. – 208 с.

22. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
23. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. . – 829 с.
24. **Бронштейн, И. Н.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
25. **Сегерлинд, Л.** Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
26. **Сенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
27. **Норри, Д.** Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. Де Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
28. **Эльсгольц, Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
29. **Де Бор, К.** Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 303 с.
30. **Лоусон, Ч.** Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
31. **Краснощеков, П. С.** Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – М.: МГУ, 1983. – 216 с.
32. **Крылов, В. И.** Вычислительные методы. Т. 2 / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
33. **Хейгеман, Л.** Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М.: Мир, 1986. – 446 с.
34. **Стечкин, С. Б.** Сплаины в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. – М.: Наука, 1976. – 230 с.
35. **Уилкинсон, Дж. Х.** Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра / Дж. Х. Уилкинсон, К. Райнш. – М.: Машиностроение, 1976. – 392 с.
36. **Григолюк, Э. И.** Метод Бубнова. – М.: НИИ механики МГУ, 1996. – 58 с.
37. **Березин, И. С.** Методы вычислений. Т. 1–2 / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – 464 с., 639 с.

Оглавление

Предисловие	3
Введение	4
1. Постановка задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	6
1.1. Постановка задачи Коши	6
1.2. Постановка краевой задачи	7
1.3. О методах решения дифференциальных уравнений	8
2. Численное решение задачи Коши	9
2.1. Простейшие методы типа Рунге–Кутта	9
2.1.1. Метод Эйлера	9
2.1.2. Исправленный метод Эйлера	11
2.1.3. Модифицированный метод Эйлера	12
2.2. Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных методов	15
2.2.1. Симметричная схема	17
2.2.2. Модифицированный метод Эйлера	18
2.3. Решение с помощью рядов Тейлора	19
2.4. Ряд Тейлора	20
3. Методы Рунге–Кутта	22
3.1. Общая формулировка методов	22
3.2. Семейство двухэтапных методов	23
3.3. Методы Рунге–Кутта более высокого порядка	26
3.4. Способы оценки погрешности приближенного решения	28
3.4.1. Оценка локальной погрешности решения	30
3.4.2. Интегрирование с переменным шагом	31
3.4.3. Выбор максимальной для данной точки длины шага	32
3.5. Методы вложенного типа. Оценка локальной погрешности	32
3.6. Доказательство сходимости методов Рунге–Кутта	35
4. Многошаговые разностные методы	37
4.1. Формулировка методов	37
4.2. Уравнение для погрешности	39
4.3. Погрешность аппроксимации многошаговых методов	40
4.4. Примеры многошаговых разностных методов Адамса	42
4.5. Метод Милна	45
4.6. Решение дифференциальных уравнений с заданной погрешностью на каждом шаге	48
5. Устойчивость, сходимость и погрешность многошаговых методов	51
5.1. Устойчивость и сходимость m -шаговых разностных методов	51
5.2. Устойчивость по начальным данным однородного разностного уравнения	53
5.3. Оценка решения неоднородного уравнения	57

5.4. Сходимость m -шагового разностного метода	58
6. Численное решение жестких систем дифференциальных уравнений	62
6.1. Условно и абсолютно устойчивые разностные методы	62
6.2. Понятие жесткой системы дифференциальных уравнений	64
6.3. Понятие жесткости для нелинейной системы дифференциальных уравнений	67
6.4. Специальные определения устойчивости	68
6.5. Неявные разностные методы Гира	71
6.6. Неявные методы Рунге–Кутты	75
6.7. О решении неявных разностных уравнений	79
6.7.1. Решение неявных уравнений Гира	79
6.7.2. Решение неявных уравнений Рунге–Кутты	81
6.7.3. Способы выбора начальных приближений	83
6.8. О решении систем уравнений и уравнений высшего порядка	84
7. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	86
7.1. Методы решения	86
7.2. Метод коллокаций	87
7.3. Метод наименьших квадратов	89
7.4. Метод Бубнова–Галеркина	91
7.5. Вариационный метод Ритца	94
7.6. Метод стрельбы	96
7.7. Метод конечных разностей	99
7.8. Метод прогонки решения разностных уравнений	100
Библиографический список	105

Учебное издание

*Виталий Иванович Мышенков,
Евгений Витальевич Мышенков*

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
Часть вторая
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор Е.Г. Петрова

Компьютерный набор и верстка В.И. Мышенкова, Е.В. Мышенкова

По тематическому плану внутривузовских изданий учебной литературы на 2004 г. поз. 84.

Лицензия ЛР № 020718 от 02.02.1998 г.

Лицензия ПД № 00326 от 14.02.2000 г.

Подписано к печати

Бумага 80 г/м² “Снегурочка”

Объем 6,75 п.л.

Тираж 100 экз.

Формат 60×88/16

Ризография

Заказ №

Издательство Московского государственного университета леса.

141005. Мытищи-5. Московская обл., 1-я Институтская, 1, МГУЛ.

Телефоны: 588-57-62, 588-53-48, 588-54-15. Факс: 588-5109.

E-mail: izdat@mgul.ac.ru